UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA UND N. HOFREITER
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

61. BAND, 2. HEFT
AUSGEGEBEN IM MAI 1957

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1957

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

61. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Andreotti, A. e **P. Salmon** Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete 97

Campbell, R. Sur les polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux 143

Aigner, A. Die Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$ in quadratischen Körpern 147

Kantz, G. Eine für die Theorie der relativ-abelschen Körper grundlegende Abelsche Operatorgruppe 151

Jenner, W. E. On Representations of the Full Linear Group and Some of its Subgroups over Infinite Fields of Prime Characteristic 157

Buchbesprechungen 161

Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete

Aldo Andreotti e **Paolo Salmon**[1], Torino

(Trasmesso 30 luglio 1956)

1. Il problema di cui si tratta è il seguente: riconoscere quando una data varietà algebrica irriducibile V_k, di dimensione $k \geqslant 1$, contiene solo sottovarietà, di dimensione massima $k-1$, che sono intersezioni complete di V_k con una ipersuperficie del suo spazio.

Si conoscono numerosi esempi di varietà V_k siffatte. Uno dei teoremi più comprensivi in proposito è dovuto a *Lefschetz*[2]; secondo questo teorema se V_k è non singolare, intersezione di $n-k$ ipersuperficie dello spazio proiettivo ad n dimensioni, complesso, allora essa contiene solo intersezioni complete se $k \geqslant 3$; se $k = 2$ lo stesso teorema vale per la V_2 generale della sua famiglia purchè V_2 non sia razionale. Casi particolari di questo teorema sono noti da tempo. Per $k = 2$, $n = 3$ si ha un teorema di *M. Noether*[3]; per $k = n - 1$ si ha un teorema di *Severi*[4]. Altri esempi di varietà contenenti solo intersezioni complete sono le varietà di *Grassmann*.

Notiamo subito che a questi tipi di teoremi assomiglia molto il noto teorema di *Appell-Humbert* sulle varietà abeliane.

---

[1] La prima redazione manoscritta di questo lavoro, che avevo iniziato e quasi concluso personalmente, presentava una lacuna tutt'altro che facile da colmare nella dimostrazione del teorema di Noether. P. Salmon ha superato questa difficoltà mediante gli sviluppi contenuti al n. 9, E.

E' inoltre dovuto a Salmon il teorema 1 del n. 9 con cui viene sostituita una proprietà più limitata da me ottenuta in altro modo. Coll'uso del risultato di Salmon si perviene compiutamente al primo teorema del n. 11. *Aldo Andreotti*.

[2] *S. Lefschetz*, On Certain Numerical Invariants of Algebraic Varieties, Trans. Am. Math. Society, t. 22, pp. 326—363 (1921). Si veda anche *G. Fano*, Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme, Atti dell'Accademia di Torino, t. 44, pp. 415—430 (1909).

[3] *M. Noether*, Zur Grundlegung der Theorie der Algebraischen Raumkurven, Berliner Abhandl. (1882). Oltre a lavoro citato di Lefschetz si può anche vedere una dimostrazione di *A. Franchetta*, Sulle curve appartenenti a una superficie generale d'ordine $n \geqslant 4$ dell S_3, Rend. dei Lincei, s. 8, t. 3, pp. 71—78 (1947)

[4] *F. Severi*, Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli, Rend. dei Lincei, s. 5, t. 15, pp. 691—696 (1906).

In una nota recente *W. Gröbner*[5] suggerisce una nuova impostazione, puramente algebrica, del problema, la quale, oltre che a svincolarlo dalla natura del corpo base, pone un interessante legame fra il problema geometrico e quello di riconoscere se gli elementi dell'anello delle classi residuali, modulo l'ideale primo definente la varietà, godono della unica decomponibilità in fattori primi.

In questo lavoro si sviluppa l'idea di *Gröbner* e si stabilisce (n. 3) un teorema in gran parte già dovuto a *Gröbner* stesso, che mette in luce il legame testè enunciato.

Il resto del lavoro è dedicato alle applicazioni. In una prima parte si traggono le più immediate conseguenze del teorema citato mostrando come da esso si deducano alcuni teoremi di *Klein* e di *Bertini*, come si possa trarne vantaggio per lo studio della superficie cubica di S_3, per quello delle serie lineari razionalmente determinate sopra la curva canonica dei primi generi, come si deducano i teoremi summenzionati sulle Grassmanniane (sopra un corpo qualsiasi).

Una seconda parte è dedicata alla dimostrazione di due teoremi contenenti come casi particolari i teoremi citati di *Noether* e *Severi*. Per il teorema di *Noether* per via di certe difficoltà algoritmiche si è dovuto supporre il corpo base di caratteristica nulla.

Le argomentazioni precedenti si applicano anche ad anelli di tipo assai più generale. Ad illustrazione di ciò, in una terza parte, si deduce, con maggior precisione, il teorema di *Appell-Humbert* sulle funzioni intermediarie. Tale teorema viene quindi esteso a particolari classi di varietà uniformizzabili.

Sarebbe stato desiderabile poter ottenere senz'altro nel secondo gruppo di applicazioni il teorema generale di *Lefschetz*, nell'ambito di queste considerazioni; si presentano però alcune difficoltà, dovute alla mancanza di una caratterizzazione semplice degli ideali 0-dimensionali negli anelli dei polinomi omogenei in più di tre indeterminate, e che non abbiamo potuto superare.

§ 1. Anelli di polinomi Z. P. E.

2. *Fattori primi e irriducibili in un anello di polinomi.* Sia K un corpo commutativo (o anche semplicemente un campo di integrità soddisfacente alla condizione massimale); sia $\mathfrak{p}_0$ un ideale primo dell'anello graduato $K[x_0, \ldots, x_n]$ dei polinomi omogenei nelle indeterminate

[5] *W. Gröbner*, Sopra un teorema di Severi, Rendiconti di Matematica, s. 5, t. 11, pp. 217—223 (1952).

$x_0, \ldots, x_n$; $\mathfrak{p}$ un ideale primo nell'anello $K[y_1, \ldots, y_n]$ dei polinomi nelle indeterminate $y_1, \ldots, y_n$. Ci proponiamo di studiare gli elementi irriducibili e gli elementi primi dell'anello delle classi residuali $\mathfrak{I}_0 = K[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_0$ o rispettivamente $\mathfrak{I} = K[y_1, \ldots, y_n]/\mathfrak{p}$. Supporremo $\mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{p}$ diversi dagli ideali (0) e (1).

Per elemento *irriducibile* intendiamo un elemento che non si possa decomporre nel prodotto di due elementi nessuno dei quali sia una unità; per elemento *primo* intendiamo un elemento che generi un ideale (principale) primo.

Se un elemento è primo, è anche irriducibile; se un elemento può decomporsi nel prodotto di fattori primi, la sua decomposizione è unica; se ogni elemento ammette una decomposizione in fattori primi, allora ogni elemento irriducibile è anche primo. In quest'ultimo caso l'anello si dice Z. P. E.

Nell'anello $\mathfrak{I}_0$ o $\mathfrak{I}$ ogni elemento si decompone nel prodotto di un numero finito di fattori irriducibili.

Invero se a è riducibile: $a = b \cdot c$ con b, c diverse da unità, risulta $(a) \subset (b)$ e $(a) \subset (c)$. Se il nostro asserto non fosse vero si verrebbe a contraddire la condizione massimale in $\mathfrak{I}_0$(o $\mathfrak{I}$) certo valida essendo $\mathfrak{I}_0$($\mathfrak{I}$) imagine omomorfa di $K[x_0, \ldots, x_n]$ (o di $K[y_1, \ldots, y_n]$).

Osservazione. Non è detto tuttavia che il numero delle possibili decomposizioni distinte in fattori irriducibili sia finito.

Ad esempio, sia $K = R$ il corpo razionale e $\mathfrak{p}_0$ l'ideale di $R[x_0, x_1, x_2]$

$$\mathfrak{p}_0 = (x_1^2 - x_0 x_2, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$$

Risulta $\mathfrak{p}_0$ primo e in $\mathfrak{I}_0$ l'elemento x_0^2 ammette infinite decomposizioni nel prodotto di due fattori lineari[6].

Ci interessano in modo particolare gli anelli di polinomi che sono Z. P. E. (in vista del significato geometrico che si può attribuire a tale condizione); cominciamo a stabilire alcuni semplici lemmi che ci saranno utili in seguito.

Lemma 1. Sia $\mathfrak{p}_0 : x_0 = \mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_0)_{x_0=1}$. Se $(\mathfrak{p}_0, x_0)$ è primo, allora condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathfrak{I}_0$ sia Z. P. E. è che tale sia $\mathfrak{I}$.

La condizione è *necessaria*. Sia $\mathfrak{I}_0$ Z. P. E., vogliamo dimostrare che $\mathfrak{I}$ è Z. P. E. Per questo basta far vedere che per ogni coppia a, b di elementi di $\mathfrak{I}$ è possibile definire il loro M. C. D., cioè un elemento d tale che

[6] Mediante la sostituzione $x_0 \to \mu^2$, $x_1 \to \lambda\mu$, $x_2 \to \lambda^2$, ciò si riduce a riconoscere che per infiniti t razionali il polinomio $(1 + t)\,\mu^4 + \mu^2\,\lambda^2 + \mu\,\lambda^3 + \lambda^4$ è riducibile in R nel prodotto di due fattori di secondo grado.

$$\alpha)\ d \mid a,\ d \mid b$$

$$\beta)\ \text{se } \delta \mid a,\ \delta \mid b \quad \text{allora } \delta \mid d$$

Siano a_0, $b_0 \in \mathfrak{I}_0$ tali che $(a_0)_{x_0=1} = a$, $(b_0)_{x_0=1} = b$. Possiamo anche supporre a_0 e b_0 primi con x_0. Sia d_0 = M. C. D. di a_0, b_0 e sia $(d_0)_{x_0=1} = d$. Da $d_0 \mid a_0$, $d_0 \mid b_0$ segue $d \mid a$, $d \mid b$. Inoltre se $a = \delta\,\alpha$, $b = \delta\,\beta$ e se δ_0 è primo con x_0 e tale che $(\delta_0)_{x_0=1} = \delta$, risulta, passando a coordinate omogenee e tenuto conto che (x_0) è primo in $\mathfrak{I}_0$, $\delta_0 \mid a_0$, $\delta_0 \mid b_0$ onde $d_0 \mid \delta_0$. Facendo $x_0 = 1$ si ha $d \mid \delta$. c. v. d.

La condizione è *sufficiente*. Sia $\mathfrak{I}$ Z. P. E., vogliamo dimostrare che tale è $\mathfrak{I}_0$. Osserviamo che ogni elemento $a_0 \in \mathfrak{I}_0$ si può scrivere nella forma $a_0 = x_0^h\,\alpha_0$ con α_0 non divisibile per x_0 e quindi primo con x_0. Ciò posto, se $b_0 = x_0^k\,\beta_0$ con β_0 primo con x_0, basta prendere come M. C. D. di a_0, b_0, l'elemento che si ha, moltiplicandolo per $x_0^{min(h,\,k)}$ dal M. C. D. δ di $\alpha = (\alpha_0)_{x_0=1}$, $\beta = (\beta_0)_{x_0=1}$ rendendolo omogeneo: $d_0 = x_0^{min(h,\,k)}\,\delta_0$, $(\delta_0)_{x_0=1} = \delta$, δ_0 primo con x_0.

Invero $d_0 \mid a_0$, $d_0 \mid b_0$ ed anche la seconda proprietà è di immediata verifica essendo (x_0) primo in $\mathfrak{I}_0$.

Osservazione. La condizione che $(\mathfrak{p}_0, x_0)$ sia primo è essenziale.

Ad esempio, sia K un corpo; $\mathfrak{p}_0 = (x_1^2 - x_0\,x_2)$ in $K[x_0, x_1, x_2]$ sicchè $\mathfrak{p} = (x^2 - y)$ in $K[x, y]$. L'anello $\mathfrak{I} = K[x, y]/\mathfrak{p}$ è Z.P.E. essendo $\mathfrak{I} \simeq K[x]$. In $\mathfrak{I}_0 = K[x_0, x_1, x_2]/\mathfrak{p}_0$ invece ogni polinomio di grado l ammette un numero finito $\leqslant 1 \cdot 3 \ldots (2l-3)(2l-1)$ di decomposizioni distinte in fattori lineari. Il massimo essendo raggiunto per ogni l tale che K contenga $2l$ elementi distinti (e quindi per ogni l se K è infinito)[7]. Si osserverà che $(\mathfrak{p}_0, x_0) = (x_1^2, x_0)$ non è primo.

Lemma 2. Sia $R_s = K[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$; $\mathfrak{p}^*$ l'estensione dell'ideale $\mathfrak{p}$ in $R_s[y_1, \ldots, y_n]$; $g \in R_{s-1}[y_1, \ldots y_n]$[8]. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathfrak{I}$ sia Z.P.E. è che tale sia $\mathfrak{I}^* = R_s[y_1, \ldots, y_n]/(\mathfrak{p}^*, g - \lambda_s)$.

---

[7] L'esempio si può generalizzare prendendo in $K[x_0, \ldots, x_n]$ per ideale $\mathfrak{p}_0$ quello generato dai minori della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} \end{pmatrix}$. In $\mathfrak{I}_0$ ogni elemento d'ordine l ammette al più $\frac{1}{l!}\prod_0^{l-1}\binom{n(l-s)}{n}$ decomposizioni distinte in fattori lineari e il massimo è raggiunto se K contiene almeno $n\,l$ elementi distinti. In coordinate non omogenee si ha un anello $\mathfrak{I}$ che è Z.P.E.

[8] $R_0 = K$. Si osservi che $\mathfrak{p}^*$ è primo, dato che $\mathfrak{I}[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$ è un campo d'integrità.

Sia $s = 1$. Allora $g \in K[y_1, \ldots, y_n]$. Sia $a(\lambda, y) \in \mathfrak{J}^*$ associamogli l'elemento $a(g, y) \in \mathfrak{J}$. Otteniamo una applicazione omomorfa di $\mathfrak{J}^*$ su tutto $\mathfrak{J}$. Ora $\mathfrak{J}$ è un campo d'integrità e $a(\lambda, y)$ come elemento di $\mathfrak{J}[\lambda]$ si annulla per $\lambda = g$ se e solo se è divisibile in $\mathfrak{J}[\lambda]$ per $\lambda - g$. Perciò $a(g, y) = 0$ in $\mathfrak{J}$ se e solo se $a(\lambda, y) = 0$ in $\mathfrak{J}^*$. Perciò $\mathfrak{J}^* \simeq \mathfrak{J}$ e da ciò l'asserto.

Si dimostra il teorema in generale servendosi della seguente osservazione: condizione necessaria e sufficiente perchè l'anello $\mathfrak{J}$ sia Z.P.E. è che tale sia l'anello $\mathfrak{J}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}]$. Invero se $\mathfrak{J}$ è Z.P.E. tale è $\mathfrak{J}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}]$ per i teoremi di Gauss. Viceversa se è Z.P.E. $\mathfrak{J}[\lambda_1, \ldots, \ldots, \lambda_{s-1}]$ e $a \in \mathfrak{J}$ ogni divisore di a è contenuto in $\mathfrak{J}$ e quindi, dati due elementi $a, b \in \mathfrak{J}$, il loro M.C.D. in $\mathfrak{J}[\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}]$ è un elemento di $\mathfrak{J}$. Ciò prova che anche $\mathfrak{J}$ è Z.P.E.

Combinando il lemma 1 col lemma 2, si ha il seguente

Lemma 3. Sia $\mathfrak{p}_0 : x_0 = \mathfrak{p}_0$; $(\mathfrak{p}_0, x_0)$ sia primo; sia $g \in R_{s-1}[x_0, \ldots, x_n]$ di grado γ, non divisibile per x_0 tale che $(\mathfrak{p}_0^*, g - \lambda_s x_0^\gamma, x_0)$ sia primo, $\mathfrak{p}_0^*$ essendo l'estensione di $\mathfrak{p}_0$ in $R_s[x_0, \ldots, x_n]$. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathfrak{J}_0$ sia Z.P.E. è che tale sia

$$\mathfrak{J}_0^* = R_s[x_0, \ldots, x_n] / (\mathfrak{p}_0^*, g - \lambda_s x_0^\gamma).$$

Osservazione 1ª. Se K è un corpo, nel lemma 2 e 3 si può sostituire $R_s = K[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$ col corpo $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$.

Sia $s = 1$. Supponiamo $\mathfrak{J}$ Z.P.E. e sia $\tilde{\mathfrak{J}} = K(\lambda)[y_1, \ldots, y_n]/\tilde{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\mathfrak{p}}$ essendo l'estensione di $\mathfrak{p}$ in $K(\lambda)[y_1, \ldots, y_n]$. Poichè l'ideale $\mathfrak{p}^*$ estensione di $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}[\lambda]$ è primo, così è primo anche $\tilde{\mathfrak{p}}$. Sia $\tilde{a} \in \tilde{\mathfrak{J}}$. Si può scrivere $\tilde{a} = \dfrac{a_1(\lambda)\, a_2(y, \lambda)}{\alpha(\lambda)}$ con $a_2(y, \lambda) \in \mathfrak{J}[\lambda]$ e privo di fattori nella sola λ, e $a_1(\lambda)$, $\alpha(\lambda) \in K[\lambda]$ e primi fra loro. Sia analogamente per $\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{J}}$, $\tilde{b} = \dfrac{b_1(\lambda)\, b_2(y, \lambda)}{\beta(\lambda)}$. Se $\tilde{b} \mid \tilde{a}$ deve $b_2(y, \lambda) \mid a_2(y, \lambda)$ in $\mathfrak{J}[\lambda]$. Pertanto detto d il M.C.D. di $a_2(y, \lambda)$, $b_2(y, \lambda)$ in $\mathfrak{J}[\lambda]$, d funge da M. C. D. di $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ in $\tilde{\mathfrak{J}}$ e $\tilde{\mathfrak{J}}$ è Z.P.E.

Viceversa se $\tilde{\mathfrak{J}}$ è Z.P.E. e $a(y) \in \mathfrak{J}$, e se $a(y) = \tilde{b}\, \tilde{c}$, con analoghe notazioni si ha in $\mathfrak{J}[\lambda]$:

$$\beta(\lambda)\, \gamma(\lambda)\, a(y) = b_2(y, \lambda)\, c_2(y, \lambda)\, a_1(\lambda)\, c_1(\lambda)$$

Per $\lambda = 0$ non può essere $\beta(0)\, \gamma(0) = 0$ altrimenti $a_1(0)\, c_1(0) = 0$ poichè $b_2(y, 0) \neq 0$ e $c_2(y, 0) \neq 0$. Ma possiamo supporre di aver soppresso la minima potenza di λ fra le massime che dividono $\beta(\lambda)\, \gamma(\lambda)$ e $a_1(\lambda)\, c_1(\lambda)$.

Quindi $b_2(y, 0)/a(y)$ in $\mathfrak{F}$. Dati perciò $a(y)$, $b(y) \in \mathfrak{F}$ e posto $d(y, \lambda)$ sia il loro M.C.D., possiamo supporre $d(y, \lambda) \in \mathfrak{F}[\lambda]$ e non divisibile per λ; $d = d(y, 0) \neq 0$ e $d/a(y)$, $d/b(y)$. Se poi $\delta(y)$ divide $a(y)$ e $b(y)$, $\delta(y)$ divide $d(y, \lambda)$ e si ha una relazione in $\mathfrak{F}[\lambda]$

$$\alpha(\lambda)\, d(y, \lambda) = \beta(\lambda)\, \delta(y)\, \gamma(y, \lambda), \quad \gamma(y, 0) \neq 0$$

da cui soppressa la massima potenza di λ che divide β o α si ha per $\lambda = 0$ che $\delta/d(y, 0) = d$.

Ciò posto, applicando successivamente il ragionamento, si vede che se e solo se $\mathfrak{F}$ è Z.P.E. tale è $\tilde{\mathfrak{F}} = K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[y_1, \ldots, y_n]/\tilde{\mathfrak{p}}$. Si estende allora il ragionamento del lemma 2, perciò anche quello del lemma 3.

Osservazione 2ª. Sia $\mathfrak{p}_0$ un ideale primo di classe principale di $K[x_0, \ldots, x_n]$ e di dimensione $k \geqslant 2$; $\mathfrak{p}_0 = (f_1, \ldots, f_{n-k})$, non contenente forme lineari.

Sia $l = x_0 + \sum_1^n \mu_i x_i$ e sia $\mathfrak{p}_0^*$ l'estensione di $\mathfrak{p}_0$ in $K(\mu_1, \ldots, \mu_n)[x_0, \ldots, x_n]$. L'ideale $(\mathfrak{p}_0^*, l)$ è primo.

Sia invero $f(\mu_n;\ x)\ h(\mu_n;\ x) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_0^*, l)$ con f e g polinomi nelle x e nelle μ. Ponendo $\mu_n \to \mu_n - \dfrac{l}{x_n}$, avremo:

$$x_n^t\, f(\mu_n - \frac{l}{x_n};\ x)\, h(\mu_n - \frac{l}{x_n};\ x) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_0^*)$$

Da cui, essendo $\mathfrak{p}_0^*$ primo, avremo ad esempio:

$$x_n^t\, f(\mu_n - \frac{l}{x_n};\ x) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_0^*)$$

ossia

$$x_n^t\, f(\mu_n;\ x) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_0^*, l) \tag{1}$$

Osserviamo ora che $(\mathfrak{p}_0, x_n)$ è di classe principale poichè $\mathfrak{p}_0$ non contiene forme lineari. Così è di classe principale l'ideale di $K[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ $(f_{1,0}, \ldots, f_{n-k,0})$, $f_{i,0} = (f_i)_{x_n=0}$, ed anche l'ideale di $K(\mu_1, \ldots, \mu_n)[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ $(f_{1,0}, \ldots, f_{n-k,0},\ x_0 + \sum_1^{n-1} \mu_i x_i)$ dato che la forma $x_0 + \sum_1^{n-1} \mu_i x_i$ non è contenuta in alcuna delle componenti (prime) di $(f_{1,0}, \ldots, f_{n-k,0})$.

Indichiamo l come f_0 e sia $x_n^t f = \sum_0^{n-k} A_i f_i$. Facendo $x_n = 0$ si ricava $\sum A_{i0} f_{i0} = 0$ ossia $A_{i0} = \sum L_{ik} f_{k0}$, $L_{ik} = -L_{ki}$ e quindi $A_i = \sum L_{ik} f_k +$

$+ x_n A_i'$, onde, sostituendo si ha $x_n^{t-1} f = \Sigma A_i' f_i$. Così proseguendo risulta $f \equiv 0\ (\mathfrak{p}, l)$ e quindi l'asserto.

Sia ora $g = \sum_0^s \lambda_i \omega_i(x) = \lambda_0 x_0^\varrho + \lambda_1 x_1^\varrho + \sum_2^s \lambda_i \omega_i(x)$, $s = \binom{\varrho+n}{n} - 1$, la forma a coefficienti indeterminati di grado ϱ.

Sia $\mathfrak{P}$ l'estensione di $(\mathfrak{p}_0^*, l)$ in $K(\mu_1, \ldots, \mu_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, \ldots, x_n]$ e sia $\gamma = g - \lambda_0 x_0^\varrho$. Proviamo che $(\mathfrak{P}, \gamma)$ è primo.

Osserviamo anzitutto che $(\mathfrak{P}, \gamma)$ è di classe principale e quindi puro e di dimensione $k - 2 \geqslant 0$. Sul corpo $K(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ si può trovare una forma lineare l_1 prima con $(\mathfrak{P}, \gamma)$; $(\mathfrak{P}, \gamma) : l_1 = (\mathfrak{P}, \gamma)$. Con un cambiamento di variabili sul corpo $K(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ si può ritenere $l_1 = x_1$.

Sia $f(\lambda_1, x)\, h(\lambda_1, x) \equiv 0\ (\mathfrak{P}, \gamma)$

ne viene

$$x_1^t f(\lambda_1 - \frac{\gamma}{x_1^\varrho}, x)\ h(\lambda_1 - \frac{\gamma}{x_1^\varrho}, x) \equiv 0\ (\mathfrak{P})$$

da cui ad esempio

$$x_1^t f(\lambda_1, x) \equiv 0\ (\mathfrak{P}, \gamma)$$

e quindi anche

$$f(\lambda_1, x) \equiv 0\ (\mathfrak{P}, \gamma)$$

Ciò posto, sia $g = \sum_0^s \tau_i \omega_i(x) = \sum_1^s \gamma_i \omega_i(x) + \eta l^\varrho$. Poichè $(\mathfrak{p}_0, l)$, $(\mathfrak{p}_0, l, g)$ sono ideali primi, ne viene che condizione necessaria e sufficiente perchè $\mathfrak{J}_0 = K[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_0$ sia Z.P.E. è che sia Z.P.E. l'anello

$$K(\mu_1, \ldots, \mu_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_s, \eta)[x_0, \ldots, x_n] / (\mathfrak{p}_0, g).$$

Notiamo che

$$\tau_0 = \eta,\ \tau_i = \lambda_i + \eta\, p_i(\mu) \qquad i = 1, \ldots, s$$

con le p_i polinomi nelle μ. Perciò

$$K(\tau_0, \ldots, \tau_s; \mu_1, \ldots, \mu_n) = K(\eta, \lambda_1, \ldots, \lambda_s; \mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Il corpo base è ora una estensione puramente trascendente di $K(\tau_0, \ldots, \tau_s)$ e si può senz'altro concludere che:

Affinchè $\mathfrak{J}_0 = K[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_0$ sia Z.P.E., nell'ipotesi che $\mathfrak{p}_0$ sia di classe principale e dimensione $k \geqslant 2$, è necessario e sufficiente che sia Z.P.E. l'anello $K(\tau_0, \ldots, \tau_s)[x_0, \ldots, x_n]/(\mathfrak{p}_0^*, g)$ ove $\mathfrak{p}_0^*$ è l'estensione di $\mathfrak{p}_0$ a $K(\tau_0, \ldots, \tau_s)[x_0, \ldots, x_n]$ e $g = \sum_0^s \tau_i \omega_i(x)$ la forma generale di grado ϱ a coefficienti τ indeterminati.

Va notato che questa osservazione non equivale per nulla al teorema di *Fano* citato alla nota (2).

3. *Anelli Z.P.E. e il problema delle intersezioni complete.* Supporremo ora che l'ideale primo $\mathfrak{p}_0$ o $\mathfrak{p}$ che si considera sia di dimensione $k \geqslant 1$ e inoltre che nel corrispondente anello di classi residuali ogni ideale principale, diverso da (0) e (1), sia $(k-1)$ dimensionale, puro.

Questa ultima condizione è indispensabile perchè si possa dare un significato preciso alle considerazioni geometriche che abbiamo in vista. Si può osservare che rientrano in questa classe gli ideali della classe principale e gli ideali supernormali. I primi corrispondono a varietà intersezioni complete; i secondi a varietà aritmeticamente normali.

Si può osservare a questo proposito che:

Se $\mathfrak{p}_0 : x_0 = \mathfrak{p}_0$ e $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_0)_{x_0=1}$; *se* $\mathfrak{p}_0$ *soddisfa alla condizione suddetta* (cioè da $\mathfrak{p}_0 : a_0 = \mathfrak{p}_0$ segue che $(\mathfrak{p}_0, a_0)$ è $(k-1)$ dimensionale, puro) *allora vi soddisfa anche* $\mathfrak{p}$ (cioè da $\mathfrak{p} : a = \mathfrak{p}$ segue che $(\mathfrak{p}, a)$ è $(k-1)$ dimensionale, puro, ovvero $(\mathfrak{p}, a) = (1)$).

Sia invero $(a_0)_{x_0=1} = a$ e sia $\mathfrak{p} : a = \mathfrak{p}$. Certo $\mathfrak{p}_0 : a_0 = \mathfrak{p}_0$ onde $(\mathfrak{p}_0, a_0)$ è $(k-1)$ dimensionale, puro.

Sia $(\mathfrak{p}_0, a_0) = \mathfrak{q}_1^{(0)} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l^{(0)}$ una decomposizione minimale in primari e siano $\mathfrak{p}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{p}_l^{(0)}$ i relativi ideali primi.

Supponiamo dapprima che $x_0 \notin \mathfrak{p}_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, l)$. Posto $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{p}_i^{(0)})_{x_0=1}$ gli ideali $\mathfrak{p}_i$ sono tutti $(k-1)$ dimensionali, primi, distinti, e gli ideali $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{q}_i^{(0)})_{x_0=1}$ sono primari relativi ai primi $\mathfrak{p}_i$. Perciò $(\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ è una decomposizione primaria minimale. Di qui l'asserto.

Se poi $x_0 \in \mathfrak{p}_{s+1}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{p}_l^{(0)}$ ma non ai $\mathfrak{p}_i^{(0)}$ con $i \leqslant s$, risulta $(\mathfrak{p}_i^{(0)})_{x_0=1} = (1)$ $(i = s+1, \ldots, l)$ e analogamente $(\mathfrak{q}_i^{(0)})_{x_0=1} = (1)$ $(i = s+1, \ldots, l)$. Per $(\mathfrak{p}, a)$ si ha perciò la decomposizione: $(\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$, $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{q}_i^{(0)})_{x_0=1}$ che risulta minimale primaria con i primi $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{p}_i^{(0)})_{x_0=1}$ $(i = 1, \ldots, s)$ tutti $(k-1)$ dimensionali. Di qui di nuovo la tesi; se $s = 0$ è $(\mathfrak{p}, a) = (1)$.

La condizione considerata s'indicherà brevemente come la *condizione* k^9. Ciò premesso dimostriamo il seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perchè in $\mathfrak{V}$(o $\mathfrak{V}_0$) *ogni ideale* $(k-1)$ *dimensionale, puro, sia principale è che* $\mathfrak{V}$ *sia Z.P.E.*

La condizione è *necessaria*. Supponiamo che in $\mathfrak{V}$ ogni ideale $(k-1)$ dimensionale, puro, sia principale. Siano a, b, elementi di $\mathfrak{V}$ non nulli. L'ideale (a, b) è di dimensione $\leqslant k-1$ (di dimensione -1 se banale).

[9] Si tratta in sostanza di postulare una forma ristretta dell'Hauptidealsatz di *Krull*.

Sia $(a, b) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{q}_{s+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ una decomposizione minimale di (a, b) in primari. Sia

$$\dim \mathfrak{q}_i = \begin{cases} k-1 & \text{per } i \leqslant s \\ \leqslant k-2 & \text{per } i > s \end{cases}$$

e poniamo $(d) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ (sicchè $d = 1$ se dim. $(a, b) \leqslant k-2$).

Ora $(d) \supseteq (a, b)$ onde $d \mid a$, $d \mid b$.

Sia poi δ un divisore comune di a, b (che non sia una unità): $a = a_1 \delta$, $b = b_1 \delta$. Posto $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{s+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$, poichè $(d) \cap \mathfrak{q} = (a, b) = (\delta)(a_1, b_1) \subseteq \subseteq (\delta)$ risulta $(\delta) \supseteq (d) \cap \mathfrak{q}$. Ma $\mathfrak{q}$ avendo dimensione $\leqslant k-2$ non può esser contenuto in nessuno degli ideali primi, tutti $(k-1)$ dimensionali, relativi a (d) e (δ), (qui si fa uso della condizione k per δ). Dividendo perciò la relazione precedente per $\mathfrak{q}$ si ha:

$$(\delta) = (\delta) : \mathfrak{q} \supseteq \{(d) : \mathfrak{q}\} \cap \mathfrak{q} : \mathfrak{q} = (d)$$

Quindi $(\delta) \supseteq (d)$ ossia $\delta \mid d$.

Ciò dimostra che in $\mathfrak{F}$ si può definire il M.C.D. d, ossia che $\mathfrak{F}$ è Z.P.E.

La condizione è *sufficiente*. Sia $\mathfrak{F}$ Z.P.E. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale $(k-1)$ dimensionale, puro, di $\mathfrak{F}$. Vogliamo provare che $\mathfrak{a}$ è principale.

Supponiamo dapprima che $\mathfrak{a}$ sia primo. Esiste in $\mathfrak{a}$ un elemento irriducibile e quindi primo p. Risulta $(p) = \mathfrak{a}$. Invero $(p) \subseteq \mathfrak{a}$, ma se fosse $(p) \subset \mathfrak{a}$ si potrebbe trovare in $\mathfrak{a}$ un elemento a non divisibile per p: allora $(p, a) \subseteq \mathfrak{a}$, ma ciò è assurdo essendo dim. $(p, a) \leqslant k-2$.

Sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ una decomposizione minimale di $\mathfrak{a}$ in primari coi relativi ideali primi $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$, tutti $(k-1)$ dimensionali per ipotesi. Per quanto testè dimostrato esistono l primi distinti $p_1, \ldots, p_l$ tali che $\mathfrak{p}_i = (p_i)$. Allora per un conveniente intero α_i, $\mathfrak{q}_i = (p_i^{\alpha_i})$ $(i = 1, \ldots, l)$. Infatti, abolendo per semplicità l'indice i, si ha che ogni elemento di $\mathfrak{q}$ è multiplo della minima potenza p^α di p che entra in $\mathfrak{q}$.

Pertanto $\mathfrak{a} = (p_1^{\alpha_1}) \cap \ldots \cap (p_l^{\alpha_l}) = (p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l})$ essendo $\mathfrak{F}$ Z.P.E.

Osservazione 1ª. Per verificare che nell'anello $\mathfrak{F}$ ogni ideale $\mathfrak{a}$, $(k-1)$ dimensionale, puro, è principale, basta verificarlo per gli ideali primi. Invero se $\mathfrak{p}$ è primo e principale, $\mathfrak{p} = (p)$, e $\mathfrak{q}$ è un primario associato a $\mathfrak{p}$, è $\mathfrak{q} = (p^\alpha)$ con α intero conveniente. Detta perciò $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ una rappresentazione minimale di $\mathfrak{a}$ in primari e detti $\mathfrak{p}_i$ i primi relativi a quei primari, sarà $\mathfrak{q}_i = (p_i^{\alpha_i})$ con p_i primi in $\mathfrak{F}$ (non solo irriducibili) onde $\mathfrak{a} = (p_i^{\alpha_1} \ldots p_i^{\alpha_l})$ essendo i p_i primi e a due a due distinti.

Osservazione 2ª. Per la sufficienza la condizione k non è sfruttata (d'altronde è conseguenza dell'ipotesi che $\mathfrak{F}$ sia Z.P.E.). Questa seconda parte del teorema è quella contenuta nel lavoro di *Gröbner*, citato nel n. 1.

L'interpretazione geometrica delle precedenti considerazioni si può formulare come segue. Sia V_k la varietà algebrica relativa all'ideale $\mathfrak{p}(o\,\mathfrak{p}_0)$ considerato. Sia W_{k-1} una sottovarietà algebrica a $(k-1)$ dimensioni, pura, contenuta in V_k, definita cioè da un ideale $(k-1)$ dimensionale, puro $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}$; diremo che W_{k-1} è una *intersezione completa* di V_k se nell'anello $\mathfrak{F}$ l'ideale $\mathfrak{a}$ è principale. Il teorema precedente può interpretarsi come un criterio per riconoscere se una varietà algebrica V_k (data da un ideale $\mathfrak{p}\,(o\,\mathfrak{p}_0)$ soddisfacente alla condizione k) non contenga altro che intersezioni complete[10].

§ 2. Prime applicazioni

4. *Teoremi di Bertini e di Klein.*

a) Nello S_n proiettivo $(x_0, \ldots, x_n)$ sopra un corpo K si consideri l'ideale $\mathfrak{p} = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ relativo allo spazio lineare $S_k(x_0, \ldots, x_k)$. L'anello $\mathfrak{F} = K[x_0, \ldots, x_n] / \mathfrak{p}$ è isomorfo all'anello $K[x_0, \ldots, x_k]$ e quindi è Z.P.E. Poichè $\mathfrak{p}$ è di classe principale applicando il teorema del n. 3 si ha il noto

Teorema di Bertini. Ogni sottovarietà $(k-1)$ dimensionale, pura, di uno spazio proiettivo (o affine) di dimensione k è rappresentata da un ideale principale, è cioè luogo di zeri di una sola ipersuperficie.

b) Nello S_n affine $(y_1, \ldots, y_n)$ consideriamo la varietà monoidale V_k di equazioni:

$$\begin{cases} y_{k+1} = \varphi_{k+1}(y_1, \ldots, y_k) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_k) \end{cases}$$

$$\varphi_i \in K[y_1, \ldots, y_n] \qquad (i = k+1, \ldots, n)$$

cioè data dall'ideale di classe principale

$$\mathfrak{p} = (y_{k+1} - \varphi_{k+1}, \ldots, y_n - \varphi_n)$$

Poichè $\mathfrak{F} = K[y_1, \ldots, y_n] / \mathfrak{p}$ è isomorfo a $K[y_1, \ldots, y_k]$ ed è quindi Z.P.E., V_k non contiene che intersezioni complete.

Passando a coordinate omogenee si ha la varietà rappresentata dall'ideale di classe principale

$\mathfrak{p}_0 = (x_0^{\alpha_{k+1}} x_{k+1} - \psi_{k+1}, \ldots, x_0^{\alpha_n} x_n - \psi_n)$ con $\psi_i \in K[x_0, \ldots, x_k]$ e non divisibili per $x_0 (i = k+1, \ldots, n)$. Se $(\mathfrak{p}_0, x_0)$ è primo, allora

[10] Il ragionamento dimostra che, affinchè un campo d'integrità, noetheriano, integralmente chiuso, sia Z. P. E., è necessario e sufficiente che ogni ideale primo minimale sia principale.

anche in coordinate omogenee V_k non contiene che intersezioni complete (n. 2, lemma 1).

In particolare sopra un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2$ ogni quadrica irriducibile di $S_n(x_0, \ldots, x_n)$ con $n \geqslant 4$, specializzata non più di $n-4$ volte (cioè con discriminante di caratteristica $\geqslant 5$) si può scrivere nella forma $x_1 x_0 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$ ove φ è una forma quadratica irriducibile. Siamo perciò nelle condizioni sopra specificate e si ha il

Teorema di Klein. Una quadrica di S_n, con $n \geqslant 4$, specializzata $n-4$ volte al più, non contiene che intersezioni complete[11].

5. *Una applicazione alla superficie cubica generale di S_3.* Tenuto presente l'esempio a) del numero precedente, ed il lemma 3 (o 2) del n. 2, si ottiene subito il teorema:

Sopra la ipersuperficie generale di un qualunque ordine dato, nello S_k ($k \geqslant 2$) proiettivo (o affine), non esistono che intersezioni complete.

Lo spazio proiettivo (o affine) S_k sia dato sopra il corpo K; sia $f_n = \sum_1^s \lambda_i \omega_i(x)$ l'equazione della forma generale di un dato ordine n, cioè a coefficienti λ_i indeterminati. Il teorema precedente va inteso nel senso che, sul corpo $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$[12], la ipersuperficie $f_n = 0$ di S_k non contiene che intersezioni complete.

Invero posto $m > k$, sia nello S_m proiettivo $(x_0, \ldots, x_m)$ sul corpo K, dato l'ideale $\mathfrak{p}_0 = (x_{k+1}, \ldots, x_m)$. L'anello $\mathfrak{J}_0 = K[x_0, \ldots, x_m] / \mathfrak{p}_0$ è Z.P.E. ed isomorfo a $K[x_0, \ldots, x_k]$. Sia $f = \sum_1^{s-1} \lambda_i \omega_i(x) + \lambda_s x_0^n$ la forma generale d'ordine n nelle indeterminate $x_0, \ldots, x_k$. Poniamo $g = \sum_1^{s-1} \lambda_i \omega_i(x)$ ed osserviamo che in $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, \ldots, x_m]$ l'ideale $(x_{k+1}, \ldots, x_m, f, x_0)$ è primo. Si possono perciò applicare le conclusioni del lemma 3 del n. 2 e si conclude che l'anello:

$$\mathfrak{J}_0^* = K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, \ldots, x_m] / (x_{k+1}, \ldots, x_m, f)$$

---

[11] Il ragionamento presuppone un corpo algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2$. Riotterremo senza restrizioni questo teorema come caso particolare di quello del n. 11.

[12] Che non è algebricamente chiuso. In questo senso va intesa la parola „generale". Essa non si può sostituire colla parola „generico". Ad esempio, sulla quadrica generale $\sum_0^3 \lambda_i x_i^2 = 0$ in S_3 non esistono che intersezioni complete. Non sulla quadrica generica ove esistono le rette $x_0 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\, x_1$, $x_2 = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\, x_3$.

è Z.P.E. Ma quell'anello è isomorfo all'anello $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, \ldots, x_k] / (f)$ e di qui l'asserto.

Consideriamo in particolare nello S_3 proiettivo la superficie cubica generale $f_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$. Le condizioni perchè essa contenga la retta di coordinate plückeriane p_{ik} si ottengono ponendo $x_i = \Sigma_k p_{ik} u^k$ in f ed annullando i coefficienti del polinomio nelle u che si ottiene. Le relazioni ottenute, insieme alla equazione della quadrica di Klein, definiscono con i loro primi membri un ideale in $K(\lambda)[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}]$ zero-dimensionale.

Sia $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$ una decomposizione minimale in primari e siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ i primi associati alle componenti zero-dimensionali. Essi sono univocamente individuati dall'ideale $\mathfrak{a}_\lambda$.

Indichiamo con $\xi_{ik}^{(s)} (s = 1, \ldots, h)$ il punto generale di $\mathfrak{p}_s$. L'ideale delle forme $f(x)$ tali che $f(\Sigma_k \xi_{ik}^{(s)} u^k) = 0$ è un ideale primo 1-dimensionale e quindi in $\mathfrak{F} = K(\lambda)[x_0, x_1, x_2, x_3] / (f_3)$ principale; indichiamolo con (p_s).

Da quanto precede risulta che l'ideale determinato dalle rette di $f_3 = 0$ è in $\mathfrak{F}$ principale e dato da $(\overset{h}{\underset{1}{\Pi}} p_s)$ dato che ideali distinti $\mathfrak{p}_s$ danno luogo a elementi p_s distinti in $\mathfrak{F}$ (cioè non associati). Da ciò il

Teorema di Salmon: Il gruppo delle rette della superficie cubica generale di S_3 è intersezione completa della superficie cubica con una ulteriore superficie (del nono ordine dato che quelle rette sono 27 distinte).[13]

Osservazione. Specializzando $f_3 = 0$ nell'una o nell'altra delle superfici:

$$\alpha x_0^3 + \beta x_1^3 + \gamma x_2^3 + \delta x_3^3 = 0$$

$$x_3 \varphi_2(x_0, x_1, x_2) - \varphi_3(x_0, x_1, x_2) = 0$$

ove

$$\varphi_2 = x_0 x_2 - x_1^2$$

$$\varphi_3 = x_2^3 + a_1 x_2^2 x_1 + a_2 x_2^2 x_0 + a_3 x_1^3 + a_4 x_1^2 x_0 + a_5 x_1 x_0^2 + a_6 x_0^3$$

l'anello $\mathfrak{F}$ rimane Z.P.E. L'ideale $(g) = (\overset{h}{\underset{1}{\Pi}} p_s)$ „si specializza" in

$$((\alpha x_0^3 + \beta x_1^3)(\alpha x_0^3 + \gamma x_2^3)(\alpha x_0^3 + \delta x_3^3))$$

$$(\varphi_2^2 \varphi_5)$$

rispettivamente, essendo $\varphi_5 = x_3^5 + \overset{5}{\underset{1}{\Sigma}}_i b_i x_3^{5-i}$ e le b_i forme di grado i

[13] *B. L. Van der Waerden*, Einführung in die Algebraische Geometrie, Springer, Berlin, p. 149 (1939).

in x_0, x_1, x_2, ,,tali che $G_{15} = \varphi_3^5 + \Sigma\, b_i \varphi_3^{5-i} \varphi_2^i$ sia l'equazione delle 15 rette unenti a coppie i sei punti $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$''.

Tenendo conto che i fattori messi in evidenza sono irriducibili in $\mathfrak{I}$ per l'uno e per l'altro ideale, ne viene che la forma $g = \prod_1^h p_s$ è certo irriducibile (dato che i p_i devono essere di grado 3 o 6 o 9 per la possibilità della prima specializzazione e di grado 2 o 4 o 5 o 7 o 9 per la seconda possibilità di specializzazione. Quindi l'ideale (g) è primo (teorema di *Jordan*). Tuttavia le frasi fra virgolette abbisognerebbero di una più accurata dimostrazione. Notiamo solamente che per la caratteristica nulla la seconda asserzione discende facilmente da una applicazione ripetuta del teorema dell' $A f + B \varphi$.

6. *Serie lineari razionalmente determinate sopra la curva generale di un dato sistema.* Consideriamo dapprima sul piano proiettivo $S_2(x_0, x_1, x_2)$ sopra il corpo K la curva generale del 4° ordine $f_4(x) = 0$ (cioè la curva del 4° ordine a coefficienti λ indeterminati). L'anello $\mathfrak{I} = K(\lambda)[x_0, x_1, x_2] / (f)$ è Z.P.E. (lemma 3, n. 2), dato che (f_4, x_0) è primo.

Invero, come al numero precedente consideriamo dapprima l'anello $\mathfrak{I} = K[x_0, x_1, x_2, x_3] / (x_3)$ che è Z.P.E.: sia $f_4 = \sum_1^{s-1} \lambda_i \omega_i(x) + \lambda_s x_0^4$; risulta in $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, x_1, x_2, x_3]$ che (x_3, f_4, x_0) è primo e quindi che $K(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)[x_0, x_1, x_2, x_3] / (x_3, f_4)$ è Z.P.E. Perciò $\mathfrak{I} = K(\lambda)[x_0, x_1, x_2] / (f_4)$ che è isomorfo all'anello precedente è Z.P.E. Pertanto ogni ideale 0-dimensionale, puro, dato su $K(\lambda)$ o sopra una sua estensione trascendente, contenente (f) è principale. In particolare ogni serie lineare completa su $f(x) = 0$ si può pensare definitiva da un ideale 0-dimensionale, puro, $\mu_0 \mathfrak{a}_0 + \ldots + \mu_r \mathfrak{a}_r$ di $\mathfrak{I}$[14] (gli ideali $\mathfrak{a}_i$ essendo fra loro equivalenti), cioè come ideale 0-dimensionale, puro, contenente (f) su $K(\lambda, \mu)$. Tale ideale risulta dunque principale e perciò la serie considerata è multipla della serie delle sezioni rettilinee. Tenuto presente che $f_4(x) = 0$ è la curva canonica generale del genere 3, si ha che: sopra la curva canonica generale del genere 3 ogni serie lineare completa razionalmente determinata è un multiplo della serie canonica.

Il ragionamento si estende al caso della curva canonica del genere 4. L'ideale di tale curva è generato su $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ da una forma di 2° ordine generale e da una generale di 3° ordine, $\mathfrak{p} = (f_2, f_3)$. L'ideale

[14] Cfr. *W. Gröbner*, Idealtheoretischer Aufbau der Algebraischen Geometrie, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 30 (1941).

(f_2, f_3, x_0) è primo e quindi si applica il ragionamento precedente. Analogamente si può procedere colla curva canonica del genere 5 che è data su $K[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ dall'ideale generato da tre forme quadratiche generali. Si ha pertanto il teorema:

Sopra la curva generale del genere p, $3 \leqslant p \leqslant 5$, ogni serie lineare completa razionalmente determinata è un multiplo della serie canonica.

E' presumibile che il teorema valga per ogni valore del genere $p \geqslant 3$.

7. *Varietà di Grassmann.* Consideriamo sopra un corpo K qualsiasi l'anello graduato dei polinomi omogenei in $\binom{n}{d+1}$, $(d < n)$, indeterminate $P_{i_0 \dots i_d}$, $i_0 < i_1 < \dots < i_d$ essendo una combinazione delle $n+1$ lettere $0, 1, \dots, n$. Consideriamo $d+1$ sistemi di indeterminate

$$\overset{0}{x} = \begin{pmatrix} \overset{0}{x_0} \\ \vdots \\ \overset{0}{x_n} \end{pmatrix}, \dots, \overset{d}{x} = \begin{pmatrix} \overset{d}{x_0} \\ \vdots \\ \overset{d}{x_n} \end{pmatrix}$$

e sia $p_{i_0 \dots i_d}(x)$ il minore estratto dalla matrice $(\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x})$ prendendo le righe $i_0, i_1, \dots, i_d$-esima. La sostituzione $P_{i_0 \dots i_d} \to p_{i_0 \dots i_d}(x)$ genera un omomorfismo dell'anello $K[\dots, P_{i_0 \dots i_d}, \dots]$ nell'anello $K[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ dei polinomi omogenei nelle $d+1$ serie di indeterminate $\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}$ (separatamente omogenei in ciascuna serie).

Sia $\mathfrak{A}$ l'imagine di $K[\dots, P_{i_0 \dots i_d}, \dots]$ in $K[\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}]$ e sia $\mathfrak{G}$ l'ideale dei polinomi del primo anello che hanno per imagine lo zero di $\mathfrak{A}$. Poichè $\mathfrak{A}$ è un campo d'integrità, $\mathfrak{G}$ è un ideale primo. Nello spazio proiettivo in cui le $P_{i_0 \dots i_d}$ si pensano come coordinate omogenee di punto $\mathfrak{G}$ definisce una varietà algebrica irriducibile, la varietà di Grassmann degli spazi proiettivi a d dimensioni d'uno spazio proiettivo ad n dimensioni $\Omega(d, n)$.

L'anello $\mathfrak{A}$ è un insieme di polinomi $f(\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x})$ omogenei in ciascuna serie di indeterminate e tali che, per una trasformazione

$$\begin{cases} \overset{i}{x} \to \overset{d}{\Sigma_k} a_{ik} \overset{k}{x} \\ i = 0, \dots, d \end{cases}$$

si trasformano con la legge:

$$f(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \dots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x}) = |a_{ik}|^m f(\overset{0}{x}, \dots, \overset{d}{x}) \qquad (2)$$

m essendo un interno (il grado di f nelle singole serie di indeterminate).

L'anello $\mathfrak{A}$ è isomorfo all'anello $K[\ldots, P_{i_0 \ldots i_d}, \ldots]/\mathfrak{G}$ onde se dimostriamo che $\mathfrak{A}$ è Z.P.E. risulta senz'altro che *la varietà di Grassmann $\Omega(d, n)$ non contiene che intersezioni complete.*

All'uopo ricordiamo alcuni teoremi dovuti a *Hodge*[15].

a) Diremo che un monomio di grado m, $P_{i_0 \ldots i_d} P_{j_0 \ldots j_d} \ldots P_{l_0 \ldots l_d}$, è canonico se, per ogni $h = 0, \ldots, d$, risulta $i_h \leqslant j_h \leqslant \ldots \leqslant l_h$. Questi monomi sono linearmente indipendenti modulo $\mathfrak{G}$ e generano il sistema completo di tutte le forme di grado m modulo $\mathfrak{G}$.

b) Se una combinazione lineare di monomi canonici

$$F(P) = \Sigma c_{ij \ldots l} P_{i_0 \ldots i_d} P_{j_0 \ldots j_d} \ldots P_{l_0 \ldots l_d}$$

si annulla quando si ponga $P_{i_0 \ldots i_d} = p_{i_0 \ldots i_d}(x)$ e si faccia $\overset{d}{x}_d = 0$, $\overset{i}{x}_k = 0$ per $i > k$[16], allora $F(P)$ risulta una combinazione di soli monomi contenenti $P_{0\,1 \ldots d}$ (cioè $c_{ij \ldots k} = 0$ se $i \neq (0, 1, \ldots, d)$).

Il primo di questi teoremi ci dice che ogni polimonio nelle $P_{i_0 \ldots i_d}$ si può riscrivere sempre in $K[\ldots, P_{i_0 \ldots i_d}, \ldots] / \mathfrak{G}$ come combinazione lineare di monomi canonici di ugual grado. Il secondo in sostanza ci dice che l'ideale $(P_{0\,1 \ldots d})$ nell'anello $K[\ldots, P_{i_0 \ldots i_d}, \ldots] / \mathfrak{G}$ (ovvero l'ideale $(\mathfrak{G}, P_{0\,1 \ldots d})$ in $K[\ldots, P_{i_0 \ldots i_d}, \ldots]$ è un ideale primo.

Ciò premesso dimostriamo anzitutto che l'anello $\mathfrak{A}$ è caratterizzato come l'insieme di tutti polinomi di $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$ che verifichino una equazione funzionale del tipo (2).

Si tratta di dimostrare che un polinomio di $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$ per il fatto di soddisfare la (2) si può riscrivere come polinomio omogeneo nei determinanti $p_{i_0 \ldots i_d}(x)$. Indichiamo con $(p_{0\,1 \ldots d})$ la matrice delle prime $d+1$ righe di $(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$. Poniamo nella (2) $(\alpha_{ik}) = (p_{0\,1 \ldots d})$ poichè

$$(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})' = (p_{0\,1 \ldots d})' \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 & \ldots & p_{0\,1 \ldots d}^{-1} p_{k\,1 \ldots d} & \ldots \\ 0 & 1 & . & 0 & \ldots & p_{0\,1 \ldots d}^{-1} p_{k\,0\,2 \ldots d} & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & \ldots \\ 0 & 0 & . & 1 & \ldots & p_{0\,1 \ldots d}^{-1} p_{0\,1 \ldots d-1} & \ldots \end{pmatrix}$$

[15] *W. V. D. Hodge*, Some enumerative results in the theory of forms, Proc. Cambridge Phil. Soc., t. 39, pp. 24—26 (1943). *Hodge* and *Pedoe*, Methods of Algebraic Geometry, Cambridge Univ. Press, vol. 2, pp. 375—382 (1952).

[16] Allora le $p_{i_0 \ldots i_d}(x)$ risultano le coordinate grassmanniane d'un generico S_d appoggiato allo S_{n-d-1} $x_0 = \ldots = x_d = 0$.

risulta

$$f(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) = p_{0\,1\,\ldots\,d}^{m} \frac{g(p_{i_0\,\ldots\,i_d})}{p_{0\,1\,\ldots\,d}^{t}}$$

g essendo un conveniente polinomio nelle $p_{i_0\,\ldots\,i_d}$, e t un intero opportuno. Se $t \leqslant m$ si ha senz'altro l'asserto. Sia $t > m$ e pongasi $t-m = \sigma$. Risulta

$$p_{0\,1\,\ldots\,d}^{\sigma} f(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) = g(p_{i_0\,\ldots\,i_d}) \tag{3}$$

Riscriviamo il polinomio $g(P_{i_0\,\ldots\,i_d})$ come polinomio combinazione lineare dei monomi canonici del suo grado. In virtù della (3) e di b) risulta che $g(p_{i_0\,\ldots\,i_d})$, così riscritto, è divisibile per $P_{0\,1\,\ldots\,d}$. Rimettendo perciò $P_{i_0\,\ldots\,i_d} = p_{i_0\,\ldots\,i_d}(x)$, nella (3) si può abbassare di una unità l'esponente σ. Così proseguendo finchè non si riduca $\sigma = 0$, si ha l'asserto.

Veniamo alla dimostrazione che $\mathfrak{A}$ è Z.P.E. Poichè $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$ è Z.P.E. raggiungeremo il nostro scopo appena si dimostri che se $f(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) \in \mathfrak{A}$ e se $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) \in K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$ è un divisore di f in $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$, allora $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) \in \mathfrak{A}$.

Sia $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ primo e sia $f(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) = p^{a}(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})\, q(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ con p, q primi fra loro in $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$. In virtù della (2) risulta:

$$p^{a}(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x})\, q(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x}) = |a_{ik}|^{m} p^{a}(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})\, q(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) \tag{4}$$

con m intero $\geqslant 0$. Ne viene che $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ divide $p(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x})$ ovvero che $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ divide $q(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x})$, sull'anello $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}, a_{ik}]$.

Il secondo caso va scartato. Posto, invero, si abbia una relazione:

$$q(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x}) = p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})\, g(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}, a_{ik})$$

con $g \in K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}, a_{ik}]$, specializzando (a_{ik}) nella matrice identica, ne verrebbe che $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ divide $q(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ contro il supposto.

Nel primo caso, poichè $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ e $p(\Sigma a_{0k} \overset{k}{x}, \ldots, \Sigma a_{dk} \overset{k}{x})$ hanno lo stesso grado complessivo nelle x, si ha:

$$p(\Sigma\, a_{0k}\overset{k}{x}, \ldots, \Sigma\, a_{dk}\overset{k}{x}) = s(a_{ik})\, p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$$

con $s(a_{ik}) \in K[a_{ik}]$.

Sostituendo nella (4) si riconosce che $s(a_{ik})$ divide $|\, a_{ik}\,|^m$. Ma $|\, a_{ik}\,|$ è un polinomio irriducibile onde $s(a_{ik})$ è una potenza di $|\, a_{ik}\,|$. Perciò $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ soddisfa ad una equazione funzionale come la (2) e $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}) \in \mathfrak{A}$. Poichè $p(\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x})$ è un qualunque fattore primo di f come polinomio di $K[\overset{0}{x}, \ldots, \overset{d}{x}]$, si ha l'asserto[17].

§ 3. Sui teoremi di Nöether e Severi

8. *Forme dello S_n contenenti intersezioni non complete, perfette.* Una vasta classe di ipersuperficie di S_n per cui l'anello delle classi residuali corrispondente non è Z.P.E. è quella delle ipersuperfici contenenti intersezioni non complete, perfette. Intendiamo precisamente con ciò che una forma $f(x_0, \ldots, x_n) \in K[x_0, \ldots, x_n]$ irriducibile dà luogo ad una ipersuperficie $f = 0$, contenente intersezioni non complete, perfette, se f è contenuta in un ideale $(n - 2)$ dimensionale, perfetto, non principale mod. f (cioè in $\mathfrak{I} = K[x_0, \ldots, x_n] \,/\, (f)$). Vale il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'ipersuperficie irriducibile $f(x) = 0$ contenga qualche intersezione incompleta, perfetta, è che $f(x)$ si possa scrivere sotto forma di determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$.

Invero se $\mathfrak{a} = (a_1(x), \ldots, a_s(x))$ è un ideale $(n - 2)$ dimensionale, perfetto, allora la catena delle sizigie si arresta alla prima matrice $U^{(2)}_{s\,s-1}$ dopo $\mathfrak{a}$ e le forme $a_i(x)$ risultano proporzionali ai minori d'ordine massimo estratti da U, presi con segno alterno. Ma quei minori non possono avere fattori comuni di grado > 0. Invero se φ è un tale fattore, nell'anello delle classi residuali mod. φ è risolubile non banalmente l'equazione $U\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{s-1} \end{pmatrix} = 0$ ossia si ha, in $K[x_0, \ldots, x_n]$, $U\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{s-1} \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{pmatrix}$; ora $\mathfrak{a}\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{pmatrix} = 0$ onde $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_s \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_{s-1} \end{pmatrix}$ quindi $U\begin{pmatrix} X_1 & -\varphi Z_1 \\ & \vdots \\ X_{s-1} & -\varphi Z_{s-1} \end{pmatrix} = 0$ cioè $X_i = \varphi Z_i$ e ciò è assurdo.

[17] La dimostrazione ci è stata suggerita dalla lettura di una nota di *Jun-ichi Igusa*, On the Arithmetic Normality of the Grassmann Variety. Proc. Nat. Ac. of

Dunque le $a_i(x)$ sono addirittura uguali a quei minori, presi con segno alterno; siano essi $D_1, \ldots, D_s$. Poichè $f \in \mathfrak{a}$ si ha

$$f = \Sigma A_i D_i$$

Se le A_i sono tutte di grado > 0 oppure identicamente nulle risulta $f = \text{Det.} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \quad U \\ A_s \end{pmatrix}$. Se qualche A_i è una costante $\neq 0$ f risulta uguale a un determinante omogeneo d'ordine $s - 1$. Ma s allora è $\geqslant 3$ poichè f fa parte della base di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}$ non è principale mod. f.

Viceversa se f è uguale a un determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$, i minori estratti da $s - 1$ sue colonne danno luogo ad un ideale perfetto $(n - 2)$ dimensionale non principale mod. f.

Osservazione 1ª. Nel caso $n = 2$ il teorema precedente fornisce una caratterizzazione completa delle curve piane contenenti intersezioni non complete. Invero allora ogni ideale puro $(n-2)$ dimensionale, cioè 0-dimensionale, è perfetto. Si osserverà che tale teorema ha tuttavia interesse solo se il corpo base K non è algebricamente chiuso.

Osservazione 2ª. Se $f = \text{Det.}\,(\varphi_{ik}) = D$ si può riconoscere direttamente, senza far uso del teorema del n. 3, che $\mathfrak{I} = K[x_0, \ldots, x_n] / (D)$ non è Z.P.E.

Invero indichiamo con $(D_{ik}) = (Adj\ D)'$. Possiamo supporre $\varphi_{11} \neq 0$; $D_{11} \neq 0$; $\Phi = \underset{i \geqq 3,\ k \geqq 3}{\text{Det.}}\,(\varphi_{ik}) \neq 0$, qualora D sia d'ordine $\geqslant 3$, altrimenti porremo $\Phi = 1$.

Consideriamo il minore $D_{11}\ D_{22} - D_{12}\ D_{21}$ dell'aggiunto. Si ha, per note proprietà dei determinanti:

$$D_{11}\ D_{22} - D_{12}\ D_{21} = f\ \Phi$$

Ora risulta grado $\Phi <$ grado $D_{ik} <$ grado f pei quattro elementi D_{ik} considerati. Un fattore irriducibile di D_{11} che non stia in Φ, non può comparire mod. f in D_{12} o D_{21}; altrimenti quel fattore dividerebbe D_{12} o D_{21} in $K[x_0, \ldots, x_n]$ poichè il grado di D_{12} e D_{21} è minore di quello di f, e f sarebbe riducibile. Ora il fattore considerato di D_{11} è irriducibile anche mod. f e ciò porta a contraddire il teorema d'Euclide.

9. *Alcuni teoremi sui determinanti omogenei.* A. Conviene a questo punto premettere alcuni teoremi sui determinanti omogenei. Sia $\mathfrak{D} = (\varphi_{ij}(x))$

Sciences, t. 40, pp. 309—313 (1954). Si noti che dalla nostra dimostrazione segue ovviamente la normalità aritmetica della varietà di Grassmann essendo $\mathfrak{N}$ Z.P.E. e quindi integralmente chiuso.

una matrice quadrata (s, s) i cui elementi $\varphi_{ij}(x)$ sono forme di $K[x_0, \ldots$ $\ldots, x_n]$ di grado μ_{ij}, tali che ogni minore del secondo ordine sia un polinomio omogeneo, onde $\mu_{ij} + \mu_{hk} = \mu_{ik} + \mu_{hj}$, e colla condizione che sia $\varphi_{ij} \equiv 0$ se $\mu_{ij} \leqslant 0$. Indicheremo con $D(x)$ il Det. $\mathfrak{D}$.

Teorema I°. L'ideale $\mathfrak{a}$ generato dai minori d'ordine $s - h + 1$ $(2 \leqslant h \leqslant s)$ non è banale se $n \geqslant h^2$ e le sue componenti non immerse han dimensione $\geqslant n - h^2$.

Se $h = s$ il teorema è ovvia conseguenza dell'Hauptidealsatz di *Krull*[18], essendo l'ideale generato da $h^2 \leqslant n$ forme. Possiamo perciò ritenere $h < s$.

Cominciamo a dimostrare che ogni zero $\bar{x}$ di $\mathfrak{a}$ appartiene ad una componente di dimensione $\geqslant n - h^2$. Distinguiamo due casi secondochè la caratteristica del determinante, per $x = \bar{x}$, è $s - h$ oppure è inferiore ad $s - h$.

a) Sia la caratteristica ϱ di $(\mathfrak{D})_{x=\bar{x}}$, $\varrho = s - h$. Possiamo ritenere non nullo in $\bar{x}$ il minore delle prime $s - h$ righe e colonne. La varietà di zero degli h^2 determinanti ottenuti orlando quel minore, poichè $h^2 \leqslant n$, ha tutte le componenti non immerse di dimensione $\geqslant n - h^2$.[18] Il punto generale d'una componente irriducibile V contenente $\bar{x}$ annulla tutti i suddeterminanti di ordine $s - h + 1$ di $\mathfrak{D}$ in virtù d'un teorema di *Kronecker*. Perciò V è varietà di zero di $\mathfrak{a}$. Osserviamo che il ragionamento vale tanto in coordinate omogenee che non omogenee.

b) Se invece per $x = \bar{x}$ la caratteristica ϱ di $\mathfrak{D}$ è $\varrho < s - h$, ragioniamo come segue. Sia non nullo per $x = \bar{x}$ il minore principale contenente gli elementi della diagonale principale di posto $s - h - \varrho + 1, \ldots$ $\ldots, s - h$. Supponiamo che la prima coordinata $\bar{x}_0$ di $\bar{x}$ sia non nulla e introduciamo coordinate non omogenee $y_i = \dfrac{x_i}{x_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Aggiungiamo ai primi $s - h - \varrho$ elementi $\varphi_{ii}(y)$ della diagonale principale una indeterminata μ; $\varphi_{ii}(y) \to \varphi_{ii}(y) + \mu$ $(i = 1, \ldots, s - h - \varrho)$. Sia $D(y; \mu)$ il nuovo determinante ottenuto e $\mathfrak{a}_\mu$ il corrispondente ideale generato dai minori d'ordine $s - h + 1$. Sian $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ le nuove coordinate di $\bar{x}$; $\bar{y}$ è uno zero di $\mathfrak{a}_\mu$. Invero $\bar{y}$ annulla tutti i minori di ordine $\varrho + 1$ delle ultime $\varrho + h$ righe di $D(y; \mu)$ (nelle quali μ non interviene) e quindi ogni minore di $D(y; \mu)$ di ordine $s - h + 1$.

[18] *W. Krull*, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Ber. Heidelberg Akad. Wiss., 1928, 7. Abh.

Ora osserviamo che $D(y;\mu)$ e $\bar{y}$ si trovano nelle condizioni a) rispetto al corpo base $K(\mu)$, poichè in $\bar{y}$ il minore principale delle prime $s-h$ righe e colonne non è nullo. Esiste perciò una varietà irriducibile V_μ, di zero per l'ideale, contenente $\bar{y}$, di dimensione $\geqslant n-h^2$. Sia $\mathfrak{p}_\mu$ l'ideale primo di $K(\mu)[y_1, \ldots, y_n]$ che definisce V_μ. Si ha:

$$\mathfrak{a}_\mu \subseteq \mathfrak{p}_\mu$$

Consideriamo il sottoanello $K[\mu, y_1, \ldots, y_n]$ di $K(\mu)[y_1, \ldots, y_n]$ e poniamo

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_\mu \cap K[\mu, y_1, \ldots, y_n]$$

$$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_\mu \cap K[\mu, y_1, \ldots, y_n]$$

onde risulta

$$\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{p}^*$$

L'ideale $\mathfrak{p}^*$ è un ideale primo in $K[\mu, y_1, \ldots, y_n]$; inoltre

$$\text{dim. } \mathfrak{p}^* = \text{dim. } \mathfrak{p}_\mu + 1$$

Perciò $\mathfrak{p}^*$ definisce una varietà V^* di dimensione $\geqslant n-h^2+1$ nello spazio affine ove $\mu, y_1, \ldots, y_n$ sono coordinate di punto, e poichè $\bar{y}$ è zero di $\mathfrak{p}_\mu$, V^* contiene la parallela all'asse μ per il punto $(0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$, e ogni polinomio di $\mathfrak{a}^*$ si annulla su V^*. Segando con $\mu = 0$, poichè $\mathfrak{a}^*$ contiene i minori di ordine $s-h+1$ di $D(y;\mu)$, risulta che tutti i minori di ordine $s-h+1$ di $D(y)$ si annullano sopra una varietà, contenente $\bar{y}$, di cui ogni componente non immersa ha dimensione $\geqslant n-h^2$.

Ripassando infine a coordinate omogenee si ha l'asserto.

Dalle argomentazioni precedenti risulta che, se l'ideale $\mathfrak{a}$ non è banale, allora ogni sua componente non immersa ha dimensione $\geqslant n-h^2$. Rimane da dimostrare perciò che, quando $n \geqslant h^2$, l'ideale $\mathfrak{a}$ non è banale.

Consideriamo l'estensione $\mathfrak{a}^*$ di $\mathfrak{a}$ nell'anello $K[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}]$

$$\mathfrak{a}^* = K[x_0, \ldots, x_{n+1}] \cdot \mathfrak{a}$$

$\mathfrak{a}^*$ in $K[x_0, \ldots, x_{n+1}]$ ha lo zero $(0, \ldots, 0, 1)$. Per quanto precede esiste una varietà irriducibile, di dimensione $\geqslant n+1-h^2$, contenente $(0, \ldots, 0, 1)$ e di zero per l'ideale $\mathfrak{a}^*$. Segando coll'iperpiano $x_{n+1} = 0$ si ha una varietà di zero dimensione $\geqslant n-h^2$ per l'ideale $\mathfrak{a}$.

B. — Nella data matrice omogenea $\mathfrak{D} = (\varphi_{ij}(x))$ lasciamo le forme $\varphi_{ij}(x)$ a coefficienti indeterminati; $\varphi_{ij}(x) = \Sigma\, \lambda_{ij}^{(h)}\, \omega_h(x)$, essendo le $\omega_h(x)$ i vari monomi dissimili di grado μ_{ij}; pensiamo cioè le indeterminate $\lambda_{ij}^{(h)}$, aggiunte al corpo base K. Sviluppando il determinante, si hanno i coefficienti ξ_a della forma $D(x)$, che supponiamo di grado l, espressi

come forme plurilineari nelle $\lambda_{ij}^{(h)}$. Nello spazio affine a $\binom{l+n}{n}$ dimensioni rappresentativo delle forme d'ordine l dello spazio proiettivo ad n dimensioni, quelle espressioni $\xi_\alpha(\lambda)$ danno le coordinate del punto generale della varietà algebrica V delle forme esprimibili nel modo considerato come determinanti. La varietà V è perciò irriducibile; pel calcolo della sua dimensione torna utile il

Teorema 2^0 — a) Supposto il corpo base K di caratteristica nulla, la dimensione d della varietà V uguaglia il volume, per l'ordine l, dell'ideale generato dagli elementi dell'aggiunto del determinante dato.

b) Se la forma $D(x) = \mathrm{Det}\,(\varphi_{ij}(x))$, quando le $\varphi_{ij}(x)$ sono a coefficienti $\lambda_{ij}^{(h)}$ indeterminati è irriducibile (sul corpo dato cui si aggiungano le indeterminate $\lambda_{ij}^{(h)}$) risulta d non superiore alla seguente espressione

$$\Phi(\mu_{ij};\, n) = \sum_{\mu_{ij}>0} \binom{\mu_{ij}+n}{n} - \sum_{\mu_{1i}-\mu_{ij}\geq 0} \binom{\mu_{1i}-\mu_{ij}+n}{n} - \sum_{\mu_{j1}-\mu_{j1}\geq 0} \binom{\mu_{i1}-\mu_{j1}+n}{n} + 2$$

c) Risulta:

$$\Phi(\mu_{ij};\, 3) \leqslant \binom{l+3}{3}$$

e se $l \geqslant 4$ vale il segno $<$.

La dimostrazione è alquanto laboriosa e si fonda sopra un criterio pel computo dei parametri essenziali che qui premettiamo.

C. — Se C è un corpo, indichiamo con $C\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ l'anello delle serie di potenze su C in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Sia $f(x_1, \ldots, x_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in R\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\},\ R = K(x_1, \ldots, x_n)$. Diremo che gli r parametri λ non sono essenziali se è possibile trovare in $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ $s < r$ elementi $\mu_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots, \mu_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ ed in $R\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ una funzione $g(x_1, \ldots, x_n;\ \mu_1, \ldots, \mu_s)$ tale che si abbia:

$$f(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \equiv g(x_1, \ldots, x_n; \mu_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r), \ldots, \mu_s(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)) \quad (5)$$

Diremo, altrimenti, che quegli r parametri sono essenziali. Si ha il seguente criterio se il corpo base K è di caratteristica nulla.

Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione

$$f(x_1, \ldots, x_n;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in R\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\},\ R = K(x_1, \ldots, x_n)$$

dipenda da $s \leqslant r$ *parametri essenziali è che il massimo numero di equazioni a derivate parziali, linearmente indipendenti, del tipo* $\sum A_i(\lambda) \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0$, *con le* $A_i(\lambda)$ *nel corpo quoziente di* $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, *soddisfatte da* f, *sia esattamente* $\varrho = r - s$[19].

[19] Cfr. *L. Bianchi*, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, ed. Spoerri, Pisa (1918).

Dalla (5) derivando parzialmente rispetto alle λ si ha:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\right) = B^{(r,s)} \left(\frac{\partial g}{\partial \mu_j}\right) \tag{6}$$

ove

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \lambda_r}\right)' ; \left(\frac{\partial g}{\partial \mu_j}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial \mu_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \mu_s}\right)'$$

$$B^{(r,s)} = \frac{\partial(\mu_1, \ldots, \mu_s)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}$$

Le equazioni

$$(y_1, \ldots, y_r)\, B = 0$$

ammettono, sul corpo quoziente di $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ almeno ϱ soluzioni linearmente indipendenti

$$(y_1, \ldots, y_r) = (A_1^{(\alpha)}, \ldots, A_r^{(\alpha)}) \qquad \alpha = 1, \ldots, \varrho$$

Posto $A^{(\varrho,r)} = (A_i^{(\alpha)})$ risulta

$$A^{(\varrho,r)} \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}\right) = 0, \tag{7}$$

da cui la necessità della condizione.

Supponiamo viceversa che f soddisfi al sistema (7), con $A^{(\varrho,r)}$ di caratteristica ϱ e sia ϱ il massimo intero possibile, cioè il sistema (7) sia tale che ogni equazione $\Sigma A_i(\lambda) \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0$ soddisfatta da f sia combinazione lineare delle equazioni (7). Certamente $\varrho \leqslant r$ e se $\varrho = r$, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i} = 0$ e quindi f dipende da $s = 0 = r - \varrho$ parametri. Possiamo ritenere perciò $\varrho < r$ e supporre (7) risolto rispetto alle prime ϱ derivate parziali cioè $A^{(\varrho,r)} = (E^{(\varrho,\varrho)} \mid B^{(\varrho,s)})$. La matrice $B = (b_{\alpha h})$ è ad elementi nel corpo quoziente di $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Posto $A^{(\alpha)} = \Sigma A_i^{(\alpha)} \dfrac{\partial}{\partial \lambda_i}$ risultano nulle tutte le parentesi tonde:

$$(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}) = A^{(\alpha)} A^{(\beta)} - A^{(\beta)} A^{(\alpha)} = \Sigma_i \{A^{(\alpha)}(A_i^{(\beta)}) - A^{(\beta)}(A_i^{(\alpha)})\} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} =$$

$$= \sum_1^s{}_j \left\{\frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} b_{\beta j} + \Sigma_h b_{\alpha h} \frac{\partial b_{\beta j}}{\partial \lambda_{\varrho+h}} - \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta} b_{\alpha j} - \Sigma_h b_{\beta h} \frac{\partial b_{\alpha j}}{\partial \lambda_{\varrho+h}}\right\} \frac{\partial}{\partial \lambda_{\varrho+j}}.$$

Invero da $(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)})\, f = 0$ segue $(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}) = \sum_1^\varrho{}_\sigma \eta_\sigma A^{(\sigma)}$, η_σ essendo

elementi del corpo quoziente di $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Confrontando i coefficienti di $\dfrac{\partial}{\partial \lambda_i}$, $i \leqslant \varrho$, risulta $\eta_\sigma = 0$, $\sigma = 1. \ldots, \varrho$ e quindi $(A^{(\alpha)}, A^{(\beta)}) = 0$.

Il sistema

$$\begin{cases} d\,\lambda_{\varrho+j} = \sum\limits_1^{\varrho} {}_\beta\, b_{\beta j}\, d\,\lambda_\beta \\ j = 1, \ldots, s \end{cases}$$

è completamente integrabile; infatti:

$$\begin{aligned} d\,d\,\lambda_{\varrho+j} &= \Sigma_{\beta\alpha} \frac{\partial\, b_{\beta j}}{\partial\, \lambda_\alpha}\, d\,\lambda_\alpha \wedge d\,\lambda_\beta + \Sigma_{h\beta\alpha} \frac{\partial\, b_{\beta j}}{\partial\, \lambda_{\varrho+h}}\, b_{\alpha h}\, d\,\lambda_\alpha \wedge d\,\lambda_\beta \\ &= \sum_{\alpha<\beta} \left\{ \frac{\partial\, b_{\beta j}}{\partial\, \lambda_\alpha} + \Sigma\, b_{\alpha h} \frac{\partial\, b_{\beta j}}{\partial\, \lambda_{\varrho+h}} - \frac{\partial\, b_{\alpha j}}{\partial\, \lambda_\beta} - \Sigma\, b_{\beta h} \frac{\partial\, b_{\alpha j}}{\partial\, \lambda_{\varrho+h}} \right\} d\,\lambda_\alpha \wedge d\,\lambda_\beta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Possiamo perciò trovare una soluzione del sistema proposto:

$$\begin{cases} \lambda_{\varrho+j} = \Lambda_{\varrho+j}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho) \\ j = 1, \ldots, s \end{cases}$$

con le $\Lambda_{\varrho+j} \in K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$[20] (conviene premettere una traslazione sulle λ, $\lambda_i \to \lambda_i - c_i$, in modo che risulti $b_{\alpha h} \in K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$). Poniamo

$$\begin{cases} \lambda^*_\alpha = \lambda_\alpha; \\ \alpha = 1, \ldots, \varrho \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda^*_{\varrho+j} = -\Lambda_{\varrho+j} + \lambda_{\varrho+j} \\ j = 1, \ldots, s \end{cases} \tag{8}$$

Risulta

$$\frac{\partial(\lambda^*_1, \ldots, \lambda^*_r)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)} = \text{Det.} \begin{pmatrix} E^{(\varrho,\varrho)} & 0 \\ -B' & E^{(s,s)} \end{pmatrix}$$

e quindi la (4) è una trasformazione invertibile e prendendo le λ^* come nuovi parametri, il sistema dato (7) assume la forma

$$(E \mid B) \left(\begin{array}{c|c} E & -B \\ \hline 0 & E \end{array} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda^*_j} \right) = 0$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda^*_j} = 0 \\ j = 1, \ldots, \varrho. \end{cases}$$

E ciò dimostra che il numero dei parametri essenziali è $\leqslant s$ e quindi, a causa della dimostrata necessità della condizione, è esattamente uguale ad s. Da ciò l'asserto.

[20] *E. Goursat*, Traité d'Analyse, Gauthier Villars, Paris, t. 2, pg. 373 (1942).

Ciò premesso consideriamo un determinante $D = \text{Det.}(\varphi_{ij}(x))$ dato da principio in B). Risulta senz'altro che il numero dei parametri essenziali da cui esso dipende è esattamente uguale alla dimensione d della varietà V.

Detto infatti $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\lambda)$ il punto generale di V, l'jacobiano $\frac{\partial(\xi)}{\partial(\lambda)}$ ha caratteristica d. Ora detto s il numero dei parametri essenziali da cui dipende D, non può essere $s > d$ poichè si possono esprimere le ξ_α per d λ convenienti, $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, come elementi di $K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$; nè può essere $s < d$ chè, altrimenti esisterebbero delle $g_\alpha(\mu) \in K\{\mu_1, \ldots, \mu_s\}$ ed s $\mu_i(\lambda) \in K\{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$ tali che $\xi_\alpha(\lambda) = g_\alpha(\mu(\lambda))$. Perciò $\frac{\partial(\xi)}{\partial(\lambda)} = \frac{\partial(g)}{\partial(\mu)} \cdot \frac{\partial(\mu)}{\partial(\lambda)}$ e la caratteristica $\frac{\partial(\xi)}{\partial(\lambda)}$ non supererebbe s.

Risulta perciò che siamo ridotti al calcolo dei parametri essenziali da cui dipende la forma D.

Applicando il criterio precedente, siamo condotti a calcolare le derivate $\frac{\partial D}{\partial \lambda_{ij}^{(h)}} = \omega_h(x) D_{ij}$, essendo D_{ij} il complemento algebrico di φ_{ij} in D, ed a ricercare quante relazioni lineari indipendenti, sul corpo quoziente di $K\{\ldots, \lambda_{ij}^{(h)}, \ldots\}$, intercedono fra quelle derivate. Una relazione siffatta è del tipo $\Sigma A_{ij}^{(h)}(\lambda)\, \omega_h(x)\, D_{ij} = 0$, ossia, posto $X_{ij} = \Sigma A_{ij}^{(h)}\, \omega_h(x)$, del tipo:

$$\Sigma X_{ij} D_{ij} = 0 \tag{9}$$

ove X_{ij} è un polinomio a coefficienti sul corpo quoziente di $K\{\ldots, \lambda_{ij}^{(h)}, \ldots\}$ e di grado μ_{ij}.

Il numero ϱ delle soluzioni indipendenti di (9) è quindi uguale al numero delle sizigie $(\ldots, X_{ij}, \ldots)'$ linearmente indipendenti, per l'ideale generato dai minori d'ordine $s - 1$ del determinante dato.

Sia l il grado della forma D, $\mathfrak{a} = (\ldots, D_{ij}, \ldots)$ l'ideale generato dagli elementi D_{ij}, $\chi(t; \mathfrak{a})$ la funzione di Hilbert (postulazione) dell'ideale $\mathfrak{a}$, d il numero dei parametri essenziali da cui dipende D, e n (nel caso che c'interessa $n = 3$) la dimensione dello spazio proiettivo $S(x)$ in cui si opera. Posto $M_{ij} = l - \mu_{ij}$, da quanto precede risulta:

$$\begin{aligned} d &= \Sigma_{ij} \binom{\mu_{ij} + n}{n} - \varrho \\ &= \Sigma \binom{l - M_{ij} + n}{n} - \varrho = \binom{l+n}{n} - \chi(l; \mathfrak{a}) \end{aligned}$$

(colla convenzione che sia $\binom{k+n}{n} = 0$ se $k < 0$), cioè il numero dei parametri essenziali da cui dipende un determinante omogeneo di grado l ad elementi generali, è uguale al volume, per l'ordine l, dell'ideale generato dagli elementi dell'aggiunto. Con ciò il punto a) è stabilito.

D. — Veniamo al punto b). Supponiamo le forme φ_{ij} così disposte in $\mathfrak{D}$ che si abbia:

$$\mu_{11} \leqslant \mu_{12} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{1s};\ \mu_{11} \leqslant \mu_{21} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{s1}.$$

Consideriamo una matrice (s, s) del tipo:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mu_{11} - \mu_{11}, \ldots, \mu_{1s} - \mu_{11} \\ \mu_{11} - \mu_{12}, \ldots, \mu_{1s} - \mu_{12} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_{11} - \mu_{1s}, \ldots, \mu_{1s} - \mu_{1s} \end{pmatrix} = (a_{ij});\ \sum_1^s{}_i a_{ti} = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = 0,$$

ove con $\mu_{1i} - \mu_{1j}$ abbiamo indicato la forma generale di quell'ordine (nulla se quel numero è negativo). Posto $(\psi_{ij}) = \mathfrak{D}\,\mathfrak{A}$ risulta:

$$\begin{aligned} \Sigma_i \psi_{ij} D_{ij} &= \Sigma_{ih} \varphi_{ih} a_{hj} D_{ij} = \Sigma_h a_{hj} \Sigma_i \varphi_{ih} D_{ij} \\ &= \Sigma a_{hj} \delta_j^h \text{ Det. } \mathfrak{D} = \text{Det. } \mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = 0. \end{aligned}$$

Onde $\Sigma_{ij} \psi_{ij} D_{ij} = 0$ e si ha una sizigia per l'ideale $(\ldots D_{ij} \ldots)$.

Analogamente se

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mu_{11} - \mu_{11}, \ldots, \mu_{11} - \mu_{s1} \\ \mu_{21} - \mu_{11}, \ldots, \mu_{21} - \mu_{s1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mu_{s1} - \mu_{11}, \ldots, \mu_{s1} - \mu_{s1} \end{pmatrix} = (b_{ij});\ \Sigma\, b_{ti} = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}) = 0.$$

$(\chi_{ij}) = \mathfrak{B}\,\mathfrak{D}$ dà una nuova sizigia per l'ideale $(\ldots D_{ij} \ldots)$.

Le matrici $\mathfrak{A}$ formano un sistema lineare contenente $\alpha = \sum_{ij} \binom{\mu_{1i} - \mu_{1j} + n}{n} - 1$ matrici indipendenti $(\mu_{1i} - \mu_{1j} \geqslant 0)$. Esse danno luogo ad altrettante sizigie indipendenti linearmente. Invero se $\Sigma \lambda_i \mathfrak{D}\,\mathfrak{A}_i = 0$ risulta $\mathfrak{D}(\Sigma \lambda_i \mathfrak{A}_i) = 0$ ossia $\Sigma \lambda_i \mathfrak{A}_i = 0$. Analogamente dalle $\mathfrak{B}$ si hanno $\beta = \Sigma \binom{\mu_{i1} - \mu_{j1} + n}{n} - 1$ sizigie linearmente indipendenti. Se supponiamo che D sia una forma irriducibile, le $\alpha + \beta$ sizigie trovate sono fra loro indipendenti.

Contrariamente avremmo una relazione del tipo:

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{D} \tag{10}$$

con $\mathfrak{A} \neq 0$, $\mathfrak{B} \neq 0$.

Sia $\mathfrak{D}^A = (D_{ji})$ l'aggiunto di $\mathfrak{D}$. Dalla (10) si ha:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}^A = \mathfrak{D}^A\,\mathfrak{B} \text{ o anche } \mathfrak{A} = \mathfrak{D}^A\,\mathfrak{B}(\mathfrak{D}^A)^{-1}. \tag{11}$$

e calcolando l'elemento di posto (ϱ, σ) si ha:

$$\Sigma_{\alpha\beta}\, D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta}\, \frac{\Delta_{\sigma\beta}}{|D^A|} = a_{\varrho\sigma}$$

(essendo $\Delta_{\sigma\beta}$ il complemento algebrico di $D_{\sigma\beta}$ in D^A)

$$\Sigma_{\alpha\beta}\, D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta}\, \Delta_{\sigma\beta} = a_{\varrho\sigma}\, \Sigma_\beta\, D_{\sigma\beta}\, \Delta_{\sigma\beta}$$

$$\Sigma_\beta\, \Delta_{\sigma\beta} \{\Sigma_\alpha\, D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta} - a_{\varrho\sigma}\, D_{\sigma\beta}\} = 0$$

ed essendo Det. $(\Delta_{\sigma\beta}) \neq 0$ (una potenza di Det. D), risulta:

$$\Sigma_\alpha\, D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta} - a_{\varrho\sigma}\, D_{\sigma\varrho} = 0 \tag{12}$$

In particolare per $\varrho = \sigma$ si ha:

$$\sum_{\alpha \neq \beta} D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta} + D_{\varrho\beta}(b_{\beta\beta} - a_{\varrho\varrho}) = 0$$

Ora $b_{\beta\beta}$ e $a_{\varrho\varrho}$ sono costanti; se $k = b_{\beta\beta} - a_{\varrho\varrho} \neq 0$, posto

$$M = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ E^{(\beta-1)} & b_{\alpha\beta} & 0 \\ & b_{\beta\beta} - a_{\varrho\varrho} & \\ & \vdots & E^{(s-\beta)} \\ 0 & b_{\alpha\beta} & \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{D}^A M$ ha l'elemento di posto (ϱ, β) nullo. Ora $\mathfrak{D}^B M$ è l'aggiunto di $M^A\,\mathfrak{D}$ (a parte una costante moltiplicativa non nulla) che ha per determinante sempre D (a parte una costante). Poichè nell'aggiunto di $M^A\,\mathfrak{D}$ un elemento è nullo, il polinomio Det. $(M^A\,\mathfrak{D})$ è riducibile[21] e ciò contraddice alla nostra ipotesi.

Dunque per ogni β e ϱ $b_{\beta\beta} = a_{\varrho\varrho}$ onde essendo $\sum_1^s{}_\beta\, b_{\beta\beta} = \sum_1^s{}_\varrho\, a_{\varrho\varrho} = 0$ è $b_{\beta\beta} = a_{\varrho\varrho} = 0$. Ma allora dalla (12) per $\sigma = \varrho$ si ha $\Sigma_\alpha\, D_{\varrho\alpha}\, b_{\alpha\beta} = 0$ ed essendo Det. $(D_{\varrho\alpha}) \neq 0$ risulta $b_{\alpha\beta} = 0$ ossia $\mathfrak{B} = 0$ contro l'ipotesi.

---

[21] Possiamo sempre supporre riordinando le forme φ_{ij} entro il determinante $D = \text{Det.}\,(\varphi_{ij})$ che sia $D_{11} = \text{adj.}\,\varphi_{11} \not\equiv 0$. Indicando con $D_{11,\,hk}$ l'aggiunto dell'elemento di posto $h-1$, $k-1$ in D_{11}, si ha:

$$D = \varphi_{11}\, D_{11} + \Sigma\, \varphi_{1h}\, \varphi_{k1}\, D_{11,\,hk} = \Sigma\, \varphi_{1h}\, \varphi_{k1}\, D_{11,\,hk}$$

Poichè $D \not\equiv 0$, uno dei termini $\varphi_{1h}\, \varphi_{k1}\, D_{11,\,hk}$ non è nullo. Possiamo supporre sia $\varphi_{12}\, \varphi_{21}\, D_{11,\,22} \neq 0$. Indichiamo $D_{11,\,22}$ brevemente con Φ; risulta $\mu_{12} + \mu_{21} + \text{grado}\ \Phi = l$ e ciascuno di questi tre interi μ_{12}, μ_{21}, grado Φ, è positivo. Dalla identità $D_{11}\, D_{22} - D_{12}\, D_{21} = D\,\Phi$ essendo $D_{11} \not\equiv 0$, si ricava $D_{12}\, D_{21} = -D\,\Phi$. Ora il grado di D_{12} è uguale a $l - \mu_{12} > l - \mu_{12} - \mu_{21} = \text{grado}\ \Phi$; perciò un fattore di D_{12} sta in D ed è un fattore proprio di D essendo il grado di D, $l > l - \mu_{12}$.

Pertanto: se D è irriducibile, il numero dei parametri essenziali d da cui D dipende è certo

$$d \leqslant \sum_{\mu_{ij}>0} \binom{\mu_{ij}+n}{n} - \sum_{ij} \binom{\mu_{1i}-\mu_{1j}+n}{n} - \sum_{ij} \binom{\mu_{i1}-\mu_{j1}+n}{n} + 2^{22} \quad (13)$$

(ove si convenga che è da porsi $\binom{\mu+n}{n} = 0$ se $\mu < 0$).

E. Venendo alla determinazione del punto c) la dividiamo in tre parti. Nella prima dimostriamo la validità di quella disuguaglianza per un determinante del secondo ordine, $s = 2$.

Nella seconda estendiamo questa proprietà a quei determinanti che presentano una forma di grado $\leqslant 0$ fra le forme della diagònale $\varphi_{h,\, s-h-1}$, $1 \leqslant h \leqslant s-2$, previa dimostrazione d'un certo lemma aritmetico.

Nella terza, con procedimento induttivo sui risultati delle due prime parti, stabiliamo la validità della disuguaglianza in generale.

(α) Indichiamo brevemente con $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ gli ordini $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$ delle forme che compongono il determinante. Per l'ipotesi che D sia irriducibile risultan tutte le μ_i positive. Si ha:

$$\Phi(\mu_{ij}; 3) = \sum_1^4 \binom{l-\mu_i+3}{3} - \sum_{i \neq j} \binom{l-\mu_i-\mu_j+3}{3}$$

come subito si verifica. Indicando von $\nu(t)$ la co-funzione di Hilbert, cioè la dimensione, dell'ideale $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, si ha, trattandosi d'un ideale di classe principale,

$$\sum_1^\infty \nu(t)\, x^t = (1-x)^{-4} \{ \sum x^{\mu_i} - \sum x^{\mu_i+\mu_j} + \sum x^{\mu_i+\mu_j+\mu_k} - x^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4} \}$$

$$= (1-x)^{-4} \{ 1 - \prod_1^4 (1-x^{\mu_i}) \}$$

$$= (1-x)^{-4} - \prod_1^4 \sum_0^{\mu_i-1} x^j$$

e risulta che $\Phi(\mu_{ij}; 3) = \nu(l)$. Ora a destra dell'ultima uguaglianza il polinomio $\prod_1^4 \sum_0^{\mu_i-1} x^j$ è di grado $\Sigma(\mu_i - 1) = 2l - 4$ e risulta perciò $\nu(t) \leqslant \binom{t+3}{3}$ valendo il segno $<$ se e solo se $t \leqslant 2l-4$. In particolare $\nu(l) = \Phi(\mu_{ij}; 3) \leqslant \binom{l+3}{3}$ e vale il segno $<$ appenachè $l \geqslant 4$[23].

[22] Si può osservare che l'ordinamento $\mu_{11} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{1s}$; $\mu_{11} \leqslant \ldots \leqslant \mu_{s1}$ non è essenziale per la validità della formula (13) come si riconosce osservando che $\mu_{1i} - \mu_{1j} = \mu_{hi} - \mu_{hj}$; $\mu_{i1} - \mu_{j1} = \mu_{ih} - \mu_{jh}$.

[23] Tutto ciò può anche stabilirsi con un po'più di fatica, col calcolo diretto.

(β) Premettiamo il seguente *lemma*: Sia $\mathfrak{M} = (\mu_{ij})$ una matrice ad elementi interi, di tipo $(t+1, t)$, $t \geqslant 2$, tale che $\mu_{ij} + \mu_{hk} = \mu_{ik} + \mu_{hj}$ $(i, h = 1, \ldots, t+1;\ k\, j = 1, \ldots, t)$. Gli elementi di $\mathfrak{M}$ si suppongono ordinati in modo che sia

$$\mu_{11} \leqslant \mu_{12} \leqslant \cdots \leqslant \mu_{1t};\ \mu_{11} \leqslant \mu_{21} \leqslant \cdots \leqslant \mu_{t+1,1}$$

e si suppone inoltre che

$$\mu_{1t-1} \leqslant 0;\ \mu_{i,\,t+1-i} > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Posto $H = \sum_{2}^{t} \mu_{i,\,t+1-i}$, risulta:

$$\binom{H+\mu_{t+1,t}+3}{3} - \binom{H+\mu_{t+1,t}-\mu_{1t}+3}{3} - \sum_{2}^{t+1}{}_i \binom{\mu_{it}+3}{3}$$
$$+ \sum_{1}^{t-1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{1t}-\mu_{1i}+3}{3} + \binom{\mu_{1i}-\mu_{1t}+3}{3} \right\}$$
$$+ \sum_{2}^{t+1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{t1}-\mu_{11}+3}{3} + \binom{\mu_{11}-\mu_{i1}+3}{3} \right\} \geqslant 2\,(t-1)$$

colla convenzione che sia $\binom{\mu+3}{3} = 0$ se $\mu < 0$.

Per $t = 2$ la disuguaglianza si verifica con un calcolo diretto[24].

Procediamo induttivamente ammettendo quella disuguaglianza per matrici di tipo $(t, t-1)$. Sopprimendo nella matrice data la prima colonna e la penultima riga si ha una matrice cui, per ipotesi, possiamo applicare la precedente disuguaglianza; si ha:

$$\binom{H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,t}+3}{3} - \binom{H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,t}-\mu_{1t}+3}{3} -$$
$$- \left\{ \sum_{2}^{t+1}{}_i \binom{\mu_{it}+3}{3} - \binom{\mu_{tt}+3}{3} \right\}$$
$$+ \left\{ \sum_{1}^{t-1}{}_i \left[\binom{\mu_{1t}-\mu_{1i}+3}{3} + \binom{\mu_{1i}-\mu_{1t}+3}{3} \right] - \binom{\mu_{1t}-\mu_{11}+3}{3} \right\}$$
$$+ \left\{ \sum_{2}^{t+1}{}_i \left[\binom{\mu_{i1}-\mu_{11}+3}{3} + \binom{\mu_{11}-\mu_{i1}+3}{3} \right] - \binom{\mu_{t1}-\mu_{11}+3}{3} \right\} \geqslant 2t-4 \quad (14)$$

La stessa disuguaglianza si può applicare alla matrice (3,2)

---

[24] Risulta dopo opportune semplificazioni, tenuto conto delle relazioni che legano gli interi μ_{ij}, che il primo membro è uguale a $\binom{-\mu_{11}+3}{3} + \mu_{12}\,\mu_{21}\,\mu_{32}$.

$$\begin{pmatrix} \mu_{11}, & \mu_{1t} \\ \mu_{t1}, & \mu_{tt} \\ H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,1} & H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,t} \end{pmatrix}$$

e quindi si ha

$$\binom{H+\mu_{t+1,t}+3}{3}-\binom{H+\mu_{t+1,t}-\mu_{1t}+3}{3}-\binom{\mu_{tt}+3}{3}-\binom{H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,t}+3}{3}$$

$$+\binom{\mu_{1t}-\mu_{11}+3}{3}+\binom{\mu_{t1}-\mu_{11}+3}{3}+\binom{H-\mu_{t1}+\mu_{t+1,1}-\mu_{11}+3}{3}\geqslant 2 \quad (15)$$

Sommando membro a membro (14) e (15) si ha la tesi.

Ciò premesso supponiamo il determinante dato di ordine s ordinato in modo che

$$\mu_{11}\leqslant\mu_{12}\leqslant\ldots\leqslant\mu_{1s},\ \mu_{11}\leqslant\mu_{21}\leqslant\ldots\leqslant\mu_{s1}$$

supponiamo inoltre che risulti

$$\mu_{i\,s-1}>0 \qquad i=1,\ldots,s-1 \qquad (16)$$

Osserviamo che se la forma rappresentata dal determinante dato è irriducibile, certo la (16) è soddisfatta. Poichè pei determinanti soddisfacenti la (16) d'ordine $s=2$ la disuguaglianza c) è stata dimostrata, possiamo procedere induttivamente ammettendo dimostrata la c) per determinanti d'ordine $\leqslant s-1$ soddisfacenti la (16) e dimostrarla per determinanti d'ordine s sempre soddisfacenti la (16).

All'uopo cominciamo a dimostrare che se il determinante dato oltre a verificare la (16) è tale che per un certo h $(1\leqslant h\leqslant s-2)$ risulti:

$$\mu_{h,\,s-1-h}\leqslant 0 \qquad (17)$$

certo la c) è soddisfatta.

Paragoniamo la funzione Φ del determinante dato coll'analoga funzione Ψ per il determinante d'ordine $h+1$ che si ha sopprimendo nel dato le prime $s-(h+1)$ colonne e le ultime $s-h$ righe ed aggiungendo invece una $h+1$ riga di forme $\Psi_{h+1,j}$ di grado $M+\mu_{sj}$ $(j=s-h,\ldots,s)$, ove $M=\sum_1^{s-h-1}\mu_{h+i,\,s-h-i}$ (cosicchè si ottiene un determinante di ordine $h+1<s$ rappresentante una forma di grado l sempre soddisfacente la (16)).

Poichè per Ψ, per l'induzione ammessa, vale la c), così essa varrà anche per Φ se dimostriamo che $\Phi\leqslant\Psi$.

Tenuto conto che

$$\Psi = \sum_{1}^{h}{}_i \sum_{s-h}^{s}{}_j \binom{\mu_{ij}+3}{3} + \binom{M+\mu_{s,\,s-h}+3}{3} + \sum_{s-h+1}^{s}{}_j \binom{M+\mu_{sj}+3}{3} -$$

$$- \sum_{s-h}^{s}{}_i \sum_{s-h}^{s}{}_j \left\{ \binom{\mu_{1i}-\mu_{1j}+3}{3} + \binom{\mu_{1j}-\mu_{1i}+3}{3} \right\} -$$

$$- \sum_{1}^{h}{}_i \sum_{1}^{h}{}_j \left\{ \binom{\mu_{i1}-\mu_{j1}+3}{3} + \binom{\mu_{j1}-\mu_{i1}+3}{3} \right\} -$$

$$- \sum_{1}^{h}{}_i \binom{M+\mu_{s,\,s-h}-\mu_{h+1-i,\,s-h}+3}{3} + 1$$

risulta:

$$\Psi - \Phi = \left\{ \binom{M+\mu_{s,\,s-h}+3}{3} - \left[\sum_{h+1}^{s}{}_i \sum_{1}^{s-h}{}_j \binom{\mu_{ij}+3}{3} - \right.\right.$$

$$- \sum_{1}^{s-h}{}_i \sum_{1}^{s-h}{}_j \left\{ \binom{\mu_{1i}-\mu_{1j}+3}{3} + \binom{\mu_{1j}-\mu_{1i}+3}{3} \right\} -$$

$$\left.\left. - \sum_{h+1}^{s}{}_i \sum_{h+1}^{s}{}_j \left\{ \binom{\mu_{i1}-\mu_{j1}+3}{3} - \binom{\mu_{j1}-\mu_{i1}+3}{3} \right\} + 2 \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{s-h+1}^{s} \left\{ \binom{M+\mu_{sj}+3}{3} - \binom{M+\mu_{sj}-\mu_{s-j+1,\,j}+3}{3} - \sum_{h+1}^{s}{}_i \binom{\mu_{ij}+3}{3} + \right.$$

$$+ \sum_{1}^{s-h-1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{1i}-\mu_{1j}+3}{3} + \binom{\mu_{1j}-\mu_{1i}+3}{3} \right\} +$$

$$\left. + \sum_{h+1}^{s}{}_i \left\{ \binom{\mu_{i1}-\mu_{s-j+1,\,1}+3}{3} + \binom{\mu_{s-j+1,\,1}-\mu_{i1}+3}{3} \right\} \right\}.$$

Poichè il minore del determinante dato, formato colle prime $h+1$ colonne e le ultime $h+1$ righe verifica la (16) la prima parentesi graffa è non negativa.

Applicando il lemma premesso alla matrice degli ordini delle forme all'incrocio delle colonne 1^a, 2^a, ..., $(s-h-1)^a$, j^a e delle righe $(s-j+1)^a$, $(h+1)^a$, $(h+2)^a$, ..., s^a (che è di tipo $(s-h-1,\ s-h)$) si riconosce che ciascun termine della successiva sommatoria porta un contributo non inferiore a 2 $(s-h-1)$ e quindi che quella somma non è inferiore a $2\,h(s-h-1)$.

Dunque $\Psi - \Phi \geqslant 2\,h(s-h-1) > 0$. c.v.d.

(γ) Rimane da completare il procedimento induttivo precedente, liberandoci dalla restrizione (17). Se il determinante dato *non* soddisfa la (17) allora anche il determinante ottenuto sopprimendo l'ultima riga e colonna verifica la (16). Sian Φ_s Φ_{s-1} le funzioni Φ relative al deter-

minante dato ed a quel suddeterminante. Per ottenere una maggiore semplicità nei calcoli invertiamo l'ordine delle prime $s-1$ righe e colonne in modo da portare la diagonale secondaria del suddeterminante al posto della diagonale principale. Si ha:

$$\Phi_s = \Phi_{s-1} + \sum_1^{s-1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{is}+3}{3} + \binom{\mu_{si}+3}{3} + \binom{\mu_{ss}+3}{3} - \right.$$

$$\left. - \sum_1^{s-1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{1s}-\mu_{1i}+3}{3} + \binom{\mu_{1i}-\mu_{1s}+3}{3} + \binom{\mu_{s1}-\mu_{i1}+3}{3} + \binom{\mu_{i1}-\mu_{s1}+3}{3} \right\} - 2. \right.$$

Per quanto visto in (α) si ha:

$$\Phi(\mu_{ii}, \mu_{is}, \mu_{si}, \mu_{ss}; 3) = \binom{\mu_{ii}+\mu_{ss}+3}{3} - \Delta_i$$

con $\Delta_i \geqslant 0$. Perciò:

$$\Phi_s = \Phi_{s-1} + \sum_1^{s-1}{}_i \left\{ \binom{\mu_{ii}+\mu_{ss}+3}{3} - \binom{\mu_{ii}+3}{3} - \binom{\mu_{ss}+3}{3} \right\} +$$

$$+ 2(s-1) + \binom{\mu_{ss}+3}{3} - \Sigma \Delta_i - 2$$

$$= \Phi_{s-1} + \frac{1}{3!} 3\, \mu_{ss}(l-\mu_{ss})^2 + \frac{1}{3!} 3\, \mu_{ss}^2 (l-\mu_{ss}) + \frac{1}{3!} 12\, \mu_{ss}(l-\mu_{ss}) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \{\mu_{ss}^3 + 6\,\mu_{ss}^2 + 11\,\mu_{ss} + 6\} + (s-2) - \Sigma \Delta_i - Q.$$

Ove $Q = \mu_{ss} \sum_{\substack{1 \\ (ij)}}^{s-1} \mu_{ii}\, \mu_{jj}$. Poichè $\Phi_{s-1} \leqslant \binom{l-\mu_{ss}+3}{3}$ risulta

$$\Phi_s \leqslant \binom{l+3}{3} - (\Sigma \Delta_i + Q - (s-2)).$$

Tenuto conto che $Q \geqslant \mu_{ss} \frac{1}{2}(s-1)(s-2)$ si riconosce subito che, essendo $s \geqslant 3$, $\Phi_s < \binom{l+3}{3}$ eccettochè per $s-3$, $\mu_{ss} = 1$ e quindi $l = 3$ nel qual caso vale l'uguale.

10. Può essere interessante verificare su questi tipi particolari di forme contenenti intersezioni incomplete, in modo diretto, i teoremi di Severi e di Noether. Per il primo deve aversi il teorema:

Se l'ipersuperficie $f(x) = 0$ irriducibile contiene intersezioni incomplete, perfette, e se s è il numero base del correspondente ideale, essa deve essere singolare se $n \geqslant 4$ e la sua varietà singolare di punti (almeno) h-upli ha dimensione $\geqslant n - h^2$, ($h < s$, se $s > 2$; $h = 2$ se $s = 2$).

Invero essendo $f(x) = \text{Det. } (\varphi_{ij})$, il luogo dei punti di S_n ove la caratteristica di D è $\leqslant s - h$ è una varietà algebrica di dimensione $\geqslant n - h^2$ (teorema 1° numero precedente), e perciò non vuota appena $n \geqslant h^2$. Ma tale varietà è contenuta in $f = 0$ ed è varietà singolare di $f = 0$ di punti h-upli.

Osservazione. Non è detto che ogni componente non immersa della varietà singolare sia di dimensione $\geqslant n$—4. Ciò si può vedere su esempi.

Per il secondo risulta il teorema:

Nello $S_3(x_0\, x_1\, x_2,\, x_3)$, sopra un corpo di caratteristica nulla, la superficie generica di ordine $l \geqslant 4$ non contiene intersezioni incomplete perfette.

Si tratta di dimostrare che un determinante omogeneo Det. (φ_{ij}) di ordine $s \geqslant 2$ e di grado $l \geqslant 4$ rappresenta solo superficie particolari. Conseguenza immediata del teorema 2° del numero precedente.

11. *I teoremi di M. Noether e Severi generalizzati.* Sia $f(x_0, \ldots, x_n) \in K[x_0, \ldots, x_n]$ una forma irriducibile e supponiamo che la ipersuperficie correspondente dello S_n proiettivo $(x_0, \ldots, x_n)$ contenga qualche intersezione incompleta. Ciò significa che l'anello $\mathfrak{I} = K[x_0, \ldots, x_n]/(f)$ non è Z.P.E. e perciò neppure l'anello

$$I = R[x_0, \ldots, x_n]/(f, g_1, \ldots, g_{n-2})$$

ove $g_i = \sum_0^n \lambda_h^{(i)} x_h$ e $R = K(\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}; \ldots; \lambda_0^{(n-2)}, \ldots, \lambda_n^{(n-2)})$ (Osservazione 2^a a pg. 102).

Osserviamo ora che l'anello $H = R[x_0, \ldots, x_n]/(g_1, \ldots, g_{n-2})$ è isomorfo all'anello $R[x_0, x_1, x_2]$ e quindi è un anello Z.P.E. ed è generato dall'ideale di classe principale (x_0, x_1, x_2). Consideriamo il polinomi f come appartenente all'anello H. Poichè $H/(f)$ non è Z.P.E. f appartiene ad un ideale, zerodimensionale, puro, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ non principale in $H/(f)$. Possiamo perciò applicare il teorema del n. 7, osservazione 1^a, e concludere che f in H si può scrivere come un determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$:

$$f = \text{Det. } (\varphi_{ij}(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x)) \text{ in } H$$

ove φ_{ij} sono elementi di H. Leggendo questa relazione su K e riducendo con le φ_{ij} a forma intera anche nelle λ si ha:

$$h(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)})\, f(x) = \text{Det. } (\psi_{ij}(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x)) + \\ + \sum_1^{n-2} A_h(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x)\, (\sum_0^n \lambda_i^{(h)} x_i) \qquad (18)$$

ove anche le A_h si possono supporre intere nelle λ e ove h è un polinomio non identicamente nullo di $K[\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}]$. La relazione è omogenea in ciascuna serie di variabili x, $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}$.

Ciò posto consideriamo l'ideale $(g_1, g_2, \ldots, g_{n-2})$ nell'anello $K[\lambda^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \lambda^{(n-2)}, x]$ dei polinomi omogenei in ciascuna delle serie di variabili considerate. Vogliamo dimostrare che è un ideale primo il cui punto generale è dato da

$$\lambda^{(h)} = (\mu_{ij}^{(h)})\, x;\ (\mu_{ij}^{(h)})' = -(\mu_{ij}^{(h)});\ x = (x_0, \ldots, x_n)'. \tag{19}$$

Invero basta dimostrare che condizione necessaria e sufficiente perchè $\varphi(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x) \in K[\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x]$ appartenga a quell'ideale è che

$$\varphi((\mu_{ij}^{(1)})\, x, \ldots, (\mu_{ij}^{(n-2)})\, x, x) \equiv 0 \tag{20}$$

La condizione è necessaria dato che $\lambda^{(h)} \,.\, x = \Sigma\, \lambda_i^{(h)} x_i = 0$ se $\lambda^{(h)} = (\mu_{ij}^{(h)})\, x$. La condizione è sufficiente. Invero, dalla (20) segue che:

$$0 = \varphi(\ldots, \lambda^{(h)} + [(\mu_{ij}^{(h)})\, x - \lambda^{(h)}], \ldots, x) =$$
$$= \varphi(\ldots, \lambda^{(h)}, \ldots, x) + \Sigma_{ih}\, (\Sigma_j\, \mu_{ij}^{(h)}\, x_j - \lambda_i^{(h)})\, B_{ih}$$

con B_{ih} polinomi convenienti negli argomenti considerati. Perciò

$$\varphi(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x) \equiv 0\ (\ldots, \Sigma_j\, \mu_{ij}^{(h)}\, x_j - \lambda_i^{(h)}, \ldots)$$

Facendo in questa relazione $\mu_{ij}^{(h)} = 0$ per $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$ si ha:

$$\varphi(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x) \equiv 0\ (\ldots, \lambda_0^{(h)} - \Sigma\, \mu_{0j}^{(h)}\, x_j,$$
$$\lambda_1^{(h)} - \mu_{10}^{(h)}\, x_0, \ldots, \lambda_n^{(h)} - \mu_{n0}^{(h)}\, x_0, \ldots)$$

e ponendo $\mu_{0j}^{(h)} = -\dfrac{\lambda_j^{(h)}}{x_0}$ e riducendo a forma intera si ottiene una relazione del tipo:

$$x_0^k\, \varphi(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x) = \sum_1^{n-2}{}_h\, A_h(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x)\, (\Sigma\, \lambda_i^{(h)}\, x_i) \tag{21}$$

Se $k = 0$ si ha la tesi, altrimenti posto $A_{h0} = (A_h)_{x_0=0}$ $g_{h0} = (g_h)_{x_0=0}$ si ha:

$$\Sigma\, A_{h0}\, g_{h0} = 0$$

Ma l'ideale $(\ldots g_{h0} \ldots)$ è di classe principale[26] e quindi per la sizigia (A_{h0}) si ha:

---

[26] L'ideale $(g_1, \ldots, g_k)$, $g_s = \sum_0^n{}_i\, \lambda_i^{(s)}\, x_i$, $K \leqslant n$ in $K[\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, x]$ è di classe principale. Ciò è ovvio se $k = 1$ qualunque sia n e quindi se $n = 1$ qualunque sia

$$A_{h0} = \Sigma\, \Omega_{hj}\, g_{j0} \quad \Omega_{hj} = -\,\Omega_{jh}$$

Da ciò si deduce

$$A_h = \Sigma\, \Omega_{hj}\, g_j + x_0\, A'_h$$

e sostituendo nella (4) dopo opportune semplificazioni:

$$x_0^{k-1}\, \varphi(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x) = \Sigma_h\, A'_h(\Sigma\, \lambda_i^{(h)}\, x_i)$$

Poichè induttivamente si può supporre il fatto dimostrato quando l'esponente con cui x_0 interviene a sinistra della (21) è k—1, si ha la tesi.

Ciò premesso, ritornando alla (18) e ponendo $\lambda^{(h)}=(\mu_{ij}^{(h)})\, x$, si ha:

$$h(\ldots, (\mu_{ij}^{(h)})\, x, \ldots)\, f(x) = \text{Det.}\, (\psi_{ij}(\ldots(\mu_{ij}^{(h)})\, x \ldots; x)). \qquad (22)$$

Consideriamo nell'anello $K[(\mu_{ij}^{(1)})\, x; \ldots; (\mu_{ij}^{(n-2)})\, x; x]$ l'ideale generato dai minori d'ordine s—1 Ψ_{ij} del determinante al secondo membro. Osserviamo subito che l'anello $K[(\mu_{ij}^{(1)})\, x, \ldots, (\mu_{ij}^{(n-2)})\, x, x]$ è, in virtù della precedente premessa, isomorfo all'anello

$$K[\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x]/(g_1, \ldots, g_{n-2})$$

Supponiamo dapprima che il numero delle variabili $x_0, \ldots, x_n$ sia $n > 4$. Allora (n. 9 teor. 1°) l'ideale $(\ldots, \Psi_{ij}, \ldots)$ non è triviale. Se il polinomio $h(\ldots, (\mu_{ij}^{(h)})\, x, \ldots)$ si annullasse in ogni zero dell'ideale precedente, in virtù del Nullstellensatz di Hilbert, per l'anello considerato, ivi risulterebbe:

$k \leqslant n$. Ammessolo per ogni $k \leqslant n-1$ in $(x_1, \ldots, x_n)$ e fino a $k-1$ per $(x_0, \ldots, x_n)$, basta dimostrare che $(g_1, \ldots, g_{k-1}) : g_k = (g_1, \ldots, g_{k-1})$. Ora sia $f(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, x) \in (g_1, \ldots, g_{k-1}) : g_k$ cioè sia $f(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}, x)\, g_k(x) = \sum_1^{k-1} A_s\, g_s$.

Ponendo $\lambda_0^{(s)} \to -\sum_1^n \frac{1}{x_0}\, \lambda_i\, x_i$, $s = 1, \ldots, k-1$, $f \to 0$ ossia, riducendo a forma intera:

$$(23)\quad x_0\, f(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(h)}, x) = \sum_1^{k-1} B_s\, g_s$$

Ponendo $x_0 = 0$ e detto $B_{s0} = (B_s)_{x_0=0} \quad g_{s0} = (g_s)_{x_0} = 0$ si ha:

$$\sum_1^{k-1} B_{s0}\, g_{s0} = 0$$

Per l'ipotesi induttiva $B_{s0} = \Sigma_t\, \Omega_{st}\, g_{t0}$; $\Omega_{st} = -\,\Omega_{ts}$ onde:

$$B_s = \sum_1^{k-1} \Omega_{st}\, g_t + x_0\, B_s'\,;\ \Omega_{st} = -\,\Omega_{ts}$$

e sostituendo in (23) si ha:

$$(24)\quad x_0^{h-1}\, f \equiv 0 \ (g_1, \ldots, g_{k-1})$$

Poichè per $h = 0$ la tesi è vera, la possiamo ammettere fino ad h—1 e da (24) si ha l'asserto.

$$h^{\varrho}(\ldots, (\mu_{ij}^{(h)})\, x, \ldots) \equiv 0 \qquad (\ldots, \Psi_{ij}, \ldots)$$

con ϱ intero conveniente.

Tenendo conto dell'isomorfismo

$$K[\ldots, (\mu_{ij}^{(h)})\, x, \ldots, x] \simeq K[\ldots, \lambda^{(h)}, \ldots, x]/(g_1, \ldots, g_{n-2})$$

si avrebbe dunque una relazione del tipo:

$$h^{\varrho}(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}) \equiv 0 \quad (\ldots, D_{ij}, \ldots, g_1, \ldots, g_{n-2})$$

essendo D_{ij} i minori d'ordine $s-2$ del Det. $(\psi_{ij}(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-2)}, x))$.

Ma tutti i minori D_{ij} se non sono identicamente nulli, sono di grado positivo in x e così pure le forme $g_1, \ldots, g_{n-2}$. Perciò $h^{\varrho} \equiv 0$, cioè $h = 0$, e ciò è assurdo.

Esiste perciò qualche zero $\bar{x}$, $\bar{\mu}_{ij}^{(h)}$, di $(\ldots, \Psi_{ij} \ldots)$ che non annulla $h(\ldots, (\mu_{ij}^{(h)})\, x, \ldots)$. In $\bar{x}$ si annullano le derivate parziali di $f(x)$ e quindi $f(x) = 0$ è singolare ed ha un luogo di punti doppi di dimensione $\geqslant n-4$.

Se invece $n = 3$; se l'ideale dei minori d'ordine $s-1$ $(\ldots, \Psi_{ij}, \ldots)$ non è triviale rimane il ragionamento precedente e $f(x) = 0$ è singolare; se l'ideale $(\ldots, \Psi_{ij}, \ldots)$ è triviale, h non può che essere costante e $f(x)$ si può scrivere sotto forma di determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$.

Otteniamo perciò i due teoremi:

Teorema. Se la ipersuperficie irriducibile $f(x) = 0$ dello S_n proiettivo per $n \geqslant 4$, contiene qualche intersezione incompleta, allora essa è singolare ed ha una varietà di dimensione $\geqslant n-4$ di punti doppi[27].

Teorema. Se la superficie irriducibile non singolare $f(x)=0$ dello S_3 proiettivo contiene qualche intersezione incompleta, allora $f(x)$ si può scrivere sotto forma di un determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$.

[27] Cioè punti, sopra una conveniente estensione del corpo base, ove si annullano tutte le derivate parziali di $f(x)$. Perciò $f(x) = 0$ presenta dei punti non „assolutamente semplici". Non è lecito nè, purtroppo, possibile, senza altra precauzione nell'enunciato del teorema intendere la frase „punto singolare", nel senso di "punto non semplice nel senso di Zariski" (Cfr. *O. Zariski*, The Concept of a Simple Point of an Abstract Algebraic Variety, Transactions of the American Mathematical Society, t. 62, pp. 1—52, (1947)). Ad esempio sia $f(x) = \sum_0^{n-1} x_i^p + a x_n^p$, $n \geqslant 4$, sopra un corpo K di caratteristica $p \neq 0$, e sia $a \in K$ (onde $f(x)$ è irriducibile). Ogni punto di $f(x) = 0$ è semplice nel senso di Zariski; tuttavia

$$f(x) = \begin{vmatrix} (\sum_0^{n-1} x_i)^{p-1} & a\, x_n^p \\ -\, x_n & \sum_0^{n-1} x_i \end{vmatrix}$$

e quindi $f(x) = 0$ contiene la intersezione non completa definita da $(x_n, \sum_0^{n-1} x_i)$.

Nel primo teorema, si ritrova un teorema stabilito da Severi sul corpo complesso.

Combinando il secondo teorema con quello del. n. 7 e 8, si ha il *Teorema* (di Noether). Sopra un corpo di caratteristica zero, la superficie generica dello S_3 d'ordine $l \geqslant 4$ contiene solo intersezioni complete.

Invero generica significa in questo caso (irriducibile) non singolare, e non rappresentabile coll'annullarsi d'un determinante omogeneo d'ordine $s \geqslant 2$, ciò che, come si è visto, porta ad escludere nello spazio lineare rappresentativo di tutte le superfici d'ordine l, un numero finito di varietà algebriche.

§ 4. Applicazione alle funzioni automorfe

12. *Applicazione alle funzioni abeliane.* Sia $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{2p})$ una matrice $(p, 2p)$ a elementi complessi e tale che Det. $\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} \neq 0$.

Per funzione intermediaria relativa alla data matrice Ω s'intende una funzione intera $\varphi(u)$ delle variabili complesse $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ soddisfacente a $2p$ equazioni funzionali del tipo:

$$\varphi(u + \omega_h) = e^{2\pi i(\lambda_h \cdot u + \gamma_h}\, \varphi(u) \tag{25}$$

ove γ_h sono costanti complesse e λ_h vettori complessi verticali con p componenti; posto $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2p})$, $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{2p} \end{pmatrix}$ la funzione $\varphi(u)$ si dirà di tipo (Λ', γ).

Risulta da noti teoremi che:

a) $\Omega' \Lambda - \Lambda' \Omega = N$ è una matrice $(2p, 2p)$ a elementi interi emisimmetrica $N' = -N$.

b) posto $\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}^{-1} = (\Phi, \overline{\Phi})$ con Φ di tipo $(2p, p)$ risulta:

$$i\, \Phi'\, N\, \overline{\Phi} \geqslant 0 \tag{26}$$

Sommando due funzioni intermediarie dello stesso tipo si ha una funzione intermediaria del medesimo tipo. Moltiplicando due funzioni di tipi (Λ_1', γ_1), (Λ_2', γ_2) si ha una funzione intermediaria di tipo

$$(\Lambda_1' + \Lambda_2', \gamma_1 + \gamma_2) = (\Lambda_1', \gamma_1) + (\Lambda_2', \gamma_2).$$

La totalità delle funzioni intermediarie relative alla matrice Ω forma perciò un anello graduato $\mathfrak{A}$, cioè un insieme di elementi, tali che a ciascuno è associato un "grado" (il tipo (Λ', γ)) appartenente ad un gruppo abeliano (il gruppo additivo matrici $(2p;\ p+1)$ a elementi complessi soddisfacente agli assiomi che definiscono un anello quando la somma si pensi lecita solo fra elementi di ugual "grado" e tale che il "grado" sia un carattere additivo dell'insieme moltiplicativo dell' anello. (Allo zero dell'anello è associato un "grado" indeterminato).

Vogliamo dimostrare che quest'anello è Z. P. E.

Ricerchiamo anzitutto le unità di $\mathfrak{A}$. Si tratta delle funzioni intermediarie che dividono 1. Sono perciò funzioni intere $\varphi(u)$ prive di zeri e pertanto della forma $e^{2\pi i\, g(u)}$ con $g(u)$ intera. Tenendo conto delle equazioni funzionali (25) risulta:

$$g(u+\omega_h) - g(u) = \lambda_h \,.\, u + \gamma_h + k_h,\ (k_h \text{ intero})$$

da cui derivando parzialmente due volte si ha:

$$g_{ik}(u+\omega_h) = g_{ik}(u),\ \left(g_{ik} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_i\, \partial u_k}\right)$$

Pel teorema di Liouville $g_{ik}(u) = s_{ik}$ è costante e quindi:

$$g = \Sigma\, s_{ik}\, u_i\, u_k + \Sigma\, b_i\, u_i + c = u'\, \mathfrak{S}\, u + b\,.\,u + c,\ \text{ove } \mathfrak{S} = (s_{ik}) = \mathfrak{S}',\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Cioè $\varphi(u)$ è della forma

$$\varphi(u) = e^{2\pi i\,(u'\,\mathfrak{S}\,u + b\,.\,u + c)} \tag{27}$$

Viceversa ogni funzione (27) è una funzione intermediaria (per la quale risulta $\Lambda = 2\,\mathfrak{S}\,\Omega,\ N = 0$) e quindi è una unità poichè anche $(\varphi(u))^{-1}$ è intermediaria.

Osserviamo che le unità di $\mathfrak{A}$ si possono altresì caratterizzare come quelle uniche funzioni intermediarie per cui $N = 0$. Invero se $N = 0$, $i\, u'\, \Phi'\, N\, \Phi\, \bar{u} \equiv 0$ e ricordando una disuguaglianza fondamentale:

$$|\, \varphi(u)\, e^{-2\pi i\, \chi(u)}\, | \leqslant G\, e^{\pi i\, u'\, \varphi'\, N\, \bar{\varphi}\, \bar{u}} \qquad (G = \text{cost.})$$

ove $\chi(u)$ è una funzione quadratica di u, risulta $\varphi(u) = \text{cost.}\, e^{2\pi i\, \chi(u)}$ in virtù del teorema di Liouville.

Ciò premesso cominciamo a dimostrare che in $\mathfrak{A}$ ogni funzione $\varphi(u)$ si può decomporre nel prodotto di un numero finito di fattori irriducibili[28].

[28] La dimostrazione può semplificarsi notevolmente. Cfr. n. seguente. Manteniamo questa dimostrazione perchè ci pare più elementare.

Volgiamo la nostra attenzione sulla totalità $\mathfrak{M}$ delle matrici N relative alle funzioni $\varphi(u)$ non unità, cioè a tutte le matrici $N \neq 0$ possibili. Quest'insieme $\mathfrak{M}$ gode delle seguenti proprietà:

a) se $N_1 \in \mathfrak{M}$, $N_2 \in \mathfrak{M}$, allora $N_1 + N_2 \in \mathfrak{M}$

b) se $N \in \mathfrak{M}$ allora $-a\,N \in \mathfrak{M}$ a razionale > 0.

La prima proprietà discende dal fatto che se φ_1, φ_2 hanno le relative matrici N_1, N_2, allora $\varphi_1 \varphi_2$ è relativa alla matrice N_1+N_2. La seconda proprietà discende dalla (26) e dal fatto che $N \neq 0$.

Si può trovare un numero finito ϱ di matrici $N_1, \ldots, N_\varrho$ linearmente indipendenti sul corpo razionale, non necessariamente appartenenti ad $\mathfrak{M}$, tali che ogni $N \in \mathfrak{M}$ si esprima come combinazione lineare a coefficienti interi $\geqslant 0$ di quelle:

$$N = \sum_1^\varrho a_i N_i, \quad a_i \geqslant 0$$

Invero, sia $M_1, \ldots, M_\varrho$ una base pel modulo generato da $\mathfrak{M}$. Se $\varrho = 1$ ogni $N \in \mathfrak{M}$ si può scrivere come $N = a\,M_1$ e a è sempre $\geqslant 0$ o sempre $\leqslant 0$ in virtù della seconda proprietà. Basta sostituire M_1 con $-M_1$ nel secondo caso per avere l'asserto. Ammesso il teorema per $\varrho - 1$ si può scegliere la base $(M_1, \ldots, M_{\varrho-1})$ in modo che ogni $N \in \mathfrak{M}$ e nel modulo $(M_1, \ldots, M_{\varrho-1})$ si esprima come combinazione a coefficienti interi $\geqslant 0$ di quelle M. Analogamente si scelga M_ϱ. Da ciò la tesi.

Se ora $\varphi(u) = \varphi_1(u)\,\varphi_2(u)$ e N, N_1, N_2 sono le relative matrici, $N = N_1 + N_2$ e se

$$N = \Sigma\, a_i\, M_i, \quad N_1 = \Sigma\, a_i'\, N_i, \quad N_2 = \Sigma\, a_i''\, N_i, \quad a_i, a_i', a_i'' \geqslant 0,$$

risulta

$$a_i = a_i' + a_i''.$$

Ne viene che proseguendo nella decomposizione di $\varphi(u)$ in fattori, dopo un numero finito di passi ci si arresta. Da ciò l'asserto.

Ricordiamo che l'anello $\mathfrak{I}$ delle funzioni intere delle $u_1, \ldots, u_p$ è un anello nel quale è definita la nozione di M.C.D. Date cioè due funzioni intere $f(u)$, $g(u)$ esiste una funzione intera $d(u)$ tale che

1°) $d(u) \mid f(u)$, $d(u) \mid g(u)$.

2°) se $\delta(u)$ è una funzione intera e $\delta(u)/f(u)$, $\delta(u)/(u)$, allora $\delta(u)/d(u)$.

Invero localmente, le funzioni olomorfe formano un anello Z.P.E. Dato un punto a dello spazio delle u, sian $f_a(u)$, $g_a(u)$ gli elementi ivi definiti da f e g e sia $d_a(u)$ il loro M.C.D. Poichè il secondo problema di Cousin è risolubile per lo $S_n(u)$, esiste una funzione intera $d(u)$ tale che ogni punto a definisce un elemento associato a d_a . $f(u) : d(u)$ e così

$g(u) : d(u)$ sono funzioni intere onde la prima proprietà è verificata. Quanto alla seconda si osservi che $\delta(u)$ definisce in ogni punto a un elemento $\delta_a(u)$ che $/d_a(u)$. Perciò $d(u) : \delta(u)$ è intera e $\delta(u)/d(u)$.

Ciò posto dimostriamo che se $f(u)$, $g(u)$ sono due funzioni intermediarie, il loro M.C.D. è una funzione intermediaria.

Se $f(u)$, $g(u)$ sono prime fra loro può fungere da M.C.D. ogni funzione intermediaria di tipo esponenziale.

Se $d(u) = (f(u), g(u))$ non è una unità, posto

$$f(u) = d(u),\ \varphi(u),\ g(u) = d(u)\,\gamma(u)$$

$\dfrac{f(u)}{g(u)} = \dfrac{\varphi(u)}{\gamma(u)}$ è una funzione meromorfa di cui la seconda espressione è data come quoziente di due funzioni intere coprime (in grande e) localmente.

Sia ora

$$f(u + \omega_h) = e^{v_h(u)}\, f(u)$$
$$g(u + \omega_h) = e^{w_h(u)}\, g(u)$$

con v_h, w_h polinomi lineari nelle u. Ciò traduce l'ipotesi che f e g sono funzioni intermediarie. Risulta pertanto:

$$\frac{f(u + \omega_h)}{g(u + \omega_h)} = \frac{\varphi(u + \omega_h)}{\gamma(u + \omega_h)} = e^{v_h(u) - w_h(u)}\, \frac{f(u)}{g(u)} = e^{v_h(u) - w_h(u)}\, \frac{\varphi(u)}{\gamma(u)}$$

Da ciò segue che $\varphi(u + \omega_h)/\varphi(u)/\varphi(u + \omega_h)$ e che analogamente $\gamma(u + \omega_h)/\gamma(u)/\gamma(u + \omega_h)$. Pertanto devono aversi relazioni del tipo:

$$\varphi(u + \omega_h) = e^{G_h(u)}\, \varphi(u)$$
$$\gamma(u + \omega_h) = e^{G_h(u) + w_h(u) - v(u)}\, \gamma(u)$$

ove $G_h(u)$ sono convenienti funzioni intere.

Ora sappiamo che data una funzione intera $\varphi(u)$ soddisfacente ad equazioni funzionali del tipo:

$$\varphi(u + \omega_h) = e^{G_h(u)}\, \varphi(u)$$

si può trovare una conveniente funzione intera $G(u)$ tale che, posto $\psi(u) = e^{G(u)}\, \varphi(u)$, la $\psi(u)$ risulti intermediaria. Posto allora $\chi(u) = e^{G(u)}\, \gamma(u)$, si ha che anche $\chi(u)$ è intermediaria e quindi $f(u) : g(u)$ si può scrivere come quoziente di due funzioni intermediarie coprime (in grande e) localmente.

Poniamo $\tilde{d}(u) = \dfrac{f(u)}{\psi(u)}$. Poichè $\psi(u)$ è associata a $\varphi(u)$ così $\tilde{d}(u)$ è

associato a $d(u)$ ed essendo funzione intera, quoziente di due funzioni intermediarie è una funzione intermediaria. Ciò dimostra l'asserto. Si ha dunque il

Teorema. L'anello graduato $\mathfrak{A}$ di tutte le funzioni intermediarie relative alla matrice Ω è un anello Z.P.E. Le unità di $\mathfrak{A}$ sono le funzioni intermediarie di tipo esponenziale caratterizzate dall'annullarsi della corrispondente matrice N. Ogni funzione intermediaria si decompone perciò in un prodotto di funzioni intermediarie prime in numero finito.

L'anello $\mathfrak{A}$ di solito non è noetheriano[29] e perciò non si possono applicare senz'altro le considerazioni del n. 3.

13. Supponiamo ora che Ω sia una matrice di *Riemann* e sia V_p la relativa varietà di *Picard*. Ci riferiamo sempre a modelli non singolari di V_p in corrispondenza biunivoca col parallelotopo dei periodi.

Cominciamo a dimostrare il

Teorema. La varietà degli zeri d'una funzione intermediaria $\varphi_0(u)$ è una varietà algebrica su V_p.

Sia M una matrice principale di Ω. Possiamo supporre senz'altro Ω e M ridotte in forma canonica:

$$\Omega = (\pi i\, \Delta^{-1} \mid A),\ \Delta = < \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p >,\ A = (a_{ik}),$$

$$1 = \delta_1/\delta_2/\ldots/\delta_p,\ M = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

Le funzioni theta d'ordine $l\,\delta_p$ sono funzioni intermediarie per cui

$$A = (0 \mid -\frac{l\,\delta_r}{\pi i} E) \qquad \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{l\,\delta_p}{2\pi i} S\,p(A) \end{pmatrix}$$

ove $S\,p(A) = (a_{11}, \ldots, a_{pp})'$.

Per queste funzioni risulta:

$$N_l = \begin{pmatrix} 0 & -l\,\delta_p\,\Delta^{-1} \\ l\,\delta_p\,\Delta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ e quindi } M = l\,\delta_p\,N_l^{-1}.$$

---

[29] Ad esempio sia $p = 1$, $\Omega = (\pi i, -1)$, $\varphi_s = \vartheta(u + 1/s)$, la successione d'ideali $\{a_s\}$ ove $a_s = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ non soddisfa la condizione massimale. Altrimenti per un certo n si avrebbe $\varphi_n = \sum_1^{n-1} a_i \varphi_i$. Tenuto conto che φ_s è di tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{\pi i} & -\dfrac{2-s}{2s\pi i} \end{pmatrix}$ le a_i devono avere $\Delta = 0$ cioè esser di tipo esponenziale e quindi costanti. Ma ciò è assurdo essendo le φ_i di tipo diverso, tutte, da φ_n. E' noetheriano l'anello $\mathfrak{A}$ se si riduce alle sole funzioni esponenziali, nel qual caso $\mathfrak{A}$ è un corpo. È questo l'unico caso.

Sia l_0 tale che per $l \geqslant l_0$, $\Theta_{l\delta_p}\varphi_0$ sia una funzione intermediaria non singolare. Ciò è possibile, detta invero N_0 la matrice degli interi caratteristici di φ_0, quella di $\Theta_{l\delta_p}\varphi_0$ è $N_l + N_0$ e corrisponde a una funzione non singolare se $l \geqslant l_0$ conveniente. Possiamo poi trovare un intero h tale che le funzioni intermediarie del tipo di $(\Theta_{l_0\,\delta_p}\varphi_0)^{h_0}$ diano luogo ad una imagine proiettiva di V_p non singolare, in corrispondenza biunivoca col parallelotopo dei periodi. Facendo variare $\Theta_{l_0\delta_p}$ nel suo sistema lineare, se l_0 è abbastanza alto (per esempio tale che le $\Theta_{l_0\delta_p}$ forniscono esse pure una imagine non singolare e in corrispondenza biunivoca col parallelotopo dei periodi di V_p) si ottiene un sistema di infinite funzioni $(\Theta_{l_0\delta_p}\varphi_0)^{h_0}$ aventi come varietà di zeri comuni la $\varphi_0 = 0$. Sul modello considerato di V_p la varietà $\varphi_0 = 0$ è perciò comune ad un sistema di iperpiani ed è quindi algebrica.

Corollario. La varietà degli zeri di un qualunque ideale di funzioni intermediarie è su V_p una varietà algebrica.

Invero è la varietà comune alle infinite varietà algebriche ottenute su V_p annullando le funzioni dell'ideale dato.

Possiamo perciò associare ad ogni ideale di funzioni intermediarie una dimensione, quella della corrispondente varietà di zeri sopra un qualunque modello, del tipo considerato, di V_p.

Per gli ideali primi si ha il

Teorema. Tutti e soli gli ideali primi dell'anello $\mathfrak{A}$ sono costituiti dalla totalità delle funzioni intermediarie nulle sopra qualche varietà algebrica irriducibile di V_p.

Invero se W è una varietà algebrica irriducibile immersa in V_p, la totalità delle funzioni intermediarie nulle su W costituisce un ideale primo dato che se $\varphi(u)\,\psi(u)$ è nulla su W e Φ, Ψ sono le varietà algebriche $\varphi(u) = 0$, $\psi(u)=0$, o $W \subseteq \Phi$ o $W \subseteq \Psi$ e quindi o $\varphi=0$ su W o $\psi=0$ su W.

Viceversa se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo, consideriamo un modello di V_p di $S_n(x_0, \ldots, x_n)$ con equazioni parametriche: $x_i = \Theta^{(i)}(u)$ ove le $\Theta^{(i)}(u)$ sono funzioni theta dello stesso ordine. Per mezzo di $\mathfrak{p}$ costruiamo l'ideale di polinomi $\mathfrak{p}^*$ in $K[x_0, \ldots, x_n]$ ponendo in $\mathfrak{p}^*$ ogni forma $f(x_0, \ldots, x_n)$ tale che $f(\Theta^{(0)}(u), \ldots, \Theta^{(n)}(u)) \in \mathfrak{p}$. L'ideale $\mathfrak{p}^*$ è primo essendo $\mathfrak{p}$ primo. Quindi $\mathfrak{p}^*$ è costituito dalla totalità delle forme di $K[x_0, \ldots, x_n]$ nulle sopra una varietà algebrica irriducibile W.

Sia $\varphi(u) \in \mathfrak{p}$ possiamo supporre $\varphi(u)$ irriducibile; la varietà $\varphi(u) = 0$ è algebrica su V_p e irriducibile, dato che se una forma $f(x_0, \ldots, x_n)$ si

annulla sopra una sua componente irriducibile $f(\Theta^{(0)}(u), \ldots, \Theta^{(n)}(u))$ è divisibile per $\varphi(u)$; si può quindi trovare un sistema di forma $f(x_0, \ldots, x_n)$ di cui essa sia luogo di zeri comuni. Poichè per ogni f siffatta $f(\Theta^{(0)}(u), \ldots$ $\ldots, \Theta^{(n)}(u)) = \varphi(u)\,\psi(u)$ è divisibile per $\varphi(u)$ ne viene che $f \in \mathfrak{p}^*$ onde $\varphi(u) = 0$ su W. Quindi W è la varietà degli zeri di $\mathfrak{p}$. Sia ora $\varphi(u)$ una funzione intermediaria nulla su W. Ragionando come nel primo teorema possiamo servirci per la imagine proiettiva di V_p della imagine ottenuta colle $(\Theta_{l_0\delta_p}\varphi)^{h_0}$ ove l_0 è abbastanza grande. Fra quelle funzioni ne possiamo scegliere una $(\tilde{\Theta}_{l_0\delta_p}\varphi)^{h_0}$ tale che $\tilde{\Theta}_{l_0\delta_p}$ non sia identicamente nulla su W. Il polinomio lineare che corrisponde a quella $(\tilde{\Theta}^{h_0}_{l_0\delta_p}\varphi)^{h_0}$ appartiene a $\mathfrak{p}^*$ poichè si annulla su W. Perciò $\tilde{\Theta}^{h_0}_{l_0\delta_p}\varphi^{h_0} \in \mathfrak{p}$. Ma $\tilde{\Theta}^{h_0}_{l_0\delta_p} \in |\,\mathfrak{p}$ altrimenti si annullerebbe su W. Quindi $\varphi^{h_0} \in \mathfrak{p}$ e poichè $\mathfrak{p}$ è primo ancora $\varphi \in \mathfrak{p}$ c.v.d.

Ciò premesso si può dimostrare il seguente teorema che è sotto forma più precisa il contenuto del teorema di *Appell-Humbert*:

Teorema. Se $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_h$ è un ideale di funzioni intermediarie rappresentabile come intersezione irriducibile di ideali primari[30] ciascuno di dimensione p—1 esso è principale $\mathfrak{a} = (\varphi_1^{a_1}(u) \ldots \varphi_h^{a_h}(u))$ le $\varphi_i(u)$ essendo funzioni intermediarie prime. La rappresentazione $\mathfrak{a} =$ $= (\varphi_1^{a_1}(u) \ldots \varphi_h^{a_h}(u))$ è unica[31].

Ed invero si può senz'altro ripetere il ragionamento addotto per la sufficienza del teorema del n. 3, tenuto conto che l'anello $\mathfrak{R}$ delle funzioni intermediarie è Z.P.E.[32].

14. *Applicazione alle funzioni automorfe.* Sia X una varietà compatta a struttura complessa, di dimensione complessa n; sia U il ricoprimento universale di X e G il gruppo degli automorfismi di U, per modo che $X = U/G$.

---

[30] Cioè nessuno di quegli ideali primari contiene l'intersezione dei rimanenti ed inoltre i corrispondenti ideali primi sono a due a due distinti.

[31] Cioè ogni altra rappresentazione siffatta differisce al più dalla precedente per l'ordine dei fattori primi e per la eventuale sostituzione di questi con fattori associati.

[32] Il contenuto di questi ultimi due n. fu scritto originariamente per il volume di *F. Conforto*, Abelsche Funktionen und Algebraische Geometrie, che uscirà fra breve (ed. Springer), dietro incitamento di *W. Gröbner* che si era trovato in difficoltà nel preparare la traduzione tedesca. Nel contempo *Gröbner* riusciva a stabilire analoghi risultati nello stesso ordine d'idee e me lo comunicava in una lettera che io ricevetti il giorno stesso che questo scritto gli fu spedito. La dimostrazione di *Gröbner* sarà riprodotta nel citato volume di *Conforto*.

Supponiamo che sulla varietà complessa U sia risolubile il secondo problema di *Cousin*.

Indichiamo con $\mathfrak{U}$ il gruppo moltiplicativo delle funzioni olomorfe su U e non nulle in alcun punto di U.

Consideriamo l'insieme $\mathfrak{A}$ delle funzioni f, olomorfe su U e soddisfacenti ad equazioni funzionali del tipo:

$$f(\sigma x) = \alpha_\sigma f(x), \ \sigma \in G, \quad x \in U \qquad (28)$$
$$\alpha_\sigma \in \mathfrak{U}.$$

per ogni automorfismo $\sigma \in G$.

Ogni funzione siffatta si chiamerà una funzione intermediaria generalizzata (f.i.g.) di tipo $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in G}$.

Il prodotto di due funzioni intermediarie generalizzate di tipi rispettivi $\{\alpha_\sigma\}_{\sigma \in G}$, $\{\beta_\sigma\}_{\sigma \in G}$ è una funzione intermediaria generalizzata di tipo $\{\alpha_\sigma \beta_\sigma\}_{\sigma \in G}$. La somma di due funzioni intermediarie generalizzate dello stesso tipo è una funzione intermediaria generalizzata del medesimo tipo. L'insieme $\mathfrak{A}$ è perciò un anello graduato di cui il gruppo $\mathfrak{U}$ è il gruppo delle unità.

Vale il *teorema*: Nelle ipotesi ammesse l'anello $\mathfrak{A}$ delle funzioni intermediarie generalizzate è Z.P.E.

Cominciamo ad osservare che ogni f.i.g. f, che non sia una unità, si decompone nel prodotto di f.i.g. irriducibili. Sia, invero, $S = (f)$ il divisore di f su X; poichè X è compatta S è la somma di un numero finito h di divisori irriducibili $\mathfrak{S}_i$: $\mathfrak{S} = \sum_1^h n_i \mathfrak{S}_i \ \ n_i > 0$. Sia $k = \sum n_i$ se $k=1$ f stessa è irriducibile onde f non può decomporsi in più di k fattori irriducibili.

Ciò posto, dati due elementi $f(x)$, $g(x)$ di $\mathfrak{A}$, poichè su U è risolubile il secondo problema di *Cousin* è definito il loro M.C.D. $d(x)$. Basta far vedere che $d(x) \in \mathfrak{A}$.

Posto

$$f(x) = d(x)\,\varphi(x); \ g(x) = d(x)\,\gamma(x)$$

risulta che $\varphi(x)$ e $\gamma(x)$ sono localmente coprime e che:

$$\frac{f(\sigma x)}{g(\sigma x)} = \frac{\varphi(\sigma x)}{\gamma(\sigma x)} = \alpha_\sigma \beta_\sigma^{-1} \frac{\varphi(x)}{\gamma(x)}, \ \alpha_\sigma, \beta_\sigma \in \mathfrak{U}.$$

Pertanto $\varphi(x)/\varphi(\sigma x)/\varphi(x)$ e $\gamma(x)/\gamma(\sigma x)/\gamma(x)$.

Quindi:

$$\varphi(\sigma x) = \eta_\sigma \varphi(x)$$
$$\gamma(\sigma x) = \eta_\sigma \beta_\sigma \alpha_\sigma^{-1} \gamma(x), \quad \eta_\sigma \in \mathfrak{U}.$$

Perciò φ e γ sono contenuti in $\mathfrak{A}$ e quindi anche $d(x)$.

Supponiamo ora che U sia analiticamente equivalente ad un domino D limitato dello spazio complesso a n dimensioni. In tal caso ogni trasformazione non identica di G su D è priva di punti uniti e X risulta realizzabile come varietà algebrica non singolare in un conveniente spazio proiettivo, P^r [33].

Il divisore $S = (f)$, su X, d'una funzione di $\mathfrak{A}$, come sottovarietà analitica compatta di dimensione massima sulla varietà algebrica X. è una varietà algebrica a $n - 1$ dimensioni. Pertanto: la varietà degli zeri di un qualunque ideale di funzioni intermediarie generalizzate è su X una sottovarietà algebrica[34].

Inoltre si ha il

Teorema. Tutti e soli gli ideali primi dell'anello $\mathfrak{A}$ sono costituiti dalla totalità delle funzioni intermediarie generalizzate, nulle sopra una varietà algebrica irriducibile di X.

Osserviamo che essendo D limitato e D/G compatto una imagine non singolare di X si ottiene con equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x_i = \Theta_i(x) \\ i = 0, \ldots, r \end{cases}$$

ove le $\Theta_i(x)$ sono serie theta di Poincaré dello stesso peso[35].

Sia $\mathfrak{p}$ l'ideale primo dato e sia $\mathfrak{p}^*$ l'ideale dei polinomi omogenei $f(x_0, \ldots, x_r)$ tali che $f(\Theta_0, \ldots, \Theta_r) \in \mathfrak{p}$.

L'ideale $\mathfrak{p}^*$ è primo e quindi costituito dalle forme nulle sopra una varietà algebrica irriducibile W di X.

Risulta senz'altro che ogni funzione di $\mathfrak{p}$ si annulla su W con ragionamento analogo a quello sviluppato al n. precedente.

---

[33] *K. Kodaira*, Kähler Varieties of Restricted Type, Annals of Mathematics, t. **60**, pp. 28—48 (1954).

[34] *W. L. Chow*, On Compact Complex Analytic Varieties, American Journa, of Mathematics, t. **71**, pp. 893—914 (1949). Il teorema di *Chow* viene qui applicato anche a divisori eventualmente singolari.

[35] *C. L. Siegel*, Analytic Functions of Several Complex Variables, litografie redatte a cura di P. T. Bateman, The Institute for Advanced Study, 1948—49.

Viceversa se la funzione $\varphi(x)$ si annulla su W, supposto com'è lecito $\varphi(x)$ irriducibile, la varietà S, $\varphi(x)=0$ su X è irriducibile. Si può trovare una forma $f(x_0, \ldots, x_r)$ il cui divisore su X sia $S + T$[36], tale che T non contenga W. Allora $f(\Theta_0, \ldots, \Theta_r) \in \mathfrak{p}^*$ e quindi, posto $f(\Theta_0, \ldots, \Theta_r) = \varphi(x)\,\psi(x)$ risulta $\varphi(x)\,\psi(x) \in \mathfrak{p}$ e poichè $\psi(x) \in |\mathfrak{p}$ ne viene che $\varphi(x) \in \mathfrak{p}$.

Viceversa l'ideale delle funzioni intermediarie generalizzate nulle sopra una varietà irriducibile W di X è certamente primo (cfr. n. 14). Di qui l'asserto.

Associata ad ogni ideale di $\mathfrak{A}$ la dimensione della corrispondente varietà di zeri su X, si ha subito il

Teorema. Se $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_h$ è un ideale di funzioni intermediarie generalizzate rappresentato come intersezione irriducibile di ideali primari, ciascuno di dimensione $n-1$, esso è principale: $\mathfrak{a}=(\varphi_1^{a_1}(x) \ldots \ldots \varphi_h^{a_h}(x))$, le $\varphi_i(x)$ essendo funzioni intermediarie generalizzate prime. La rappresentazione data di $\mathfrak{a}$ è unica.

In altre parole possiamo dire che *si ha un teorema di Appell-Humbert sopra ogni varietà algebrica uniformizzabile*[37] *sopra un domino limitato D*

---

[36] Sia X^n di ordine a, S di ordine b e sia X^1 una curva irriducibile non singolare intersezione di X^n con uno spazio P^{r-n+1} generico. Le forme d'ordine l abbastanza alto, per S, segano fuori di S un sistema lineare irriducibile, privo di punti base. Invero le forme d'ordine l alto segano su X un sistema di dimensione $\frac{1}{n!}\,al^n + [n-1]$; su X^1 una serie di dimensione $a\,l + [0]$, su S sistema di dimensione $\frac{1}{(n-1)!}\,b\,l^{n-1} + [n-2]$. La serie segata su X^1 è completa onde, detto B il gruppo di b punti comuni a S e a X^1 e C un gruppo della serie residua, l'ordine di C è $l\,a - b$ e la serie $|C|$ non ha punti fissi. Fissato un gruppo C di punti distinti, le forme d'ordine l per C segano su X sistema di dimensione $\geqslant \frac{1}{n!}\,a\,l^n + [n-1] - (la-b)$ cioè di dimensione $\frac{1}{n!}\,a\,l^n + [n-1]$ fra queste quelle che passano per S formano un sistema lineare di dimensione $\geqslant \frac{1}{n!}\,al^n + [n-1] - \frac{1}{(n-1)!}\,b\,l^{n-1} - [n-2]$ cioè di dimensione $\frac{1}{n!}\,a\,l^n + [n-1]$ se l è alto. Perciò esistono forme di ordine l per S e per C, non contenenti X. Ciò significa che le forme d'ordine l per S segano su X^1 la serie $|C|$ completa.

Da ciò discende che il sistema residuo di S rispetto a quello segato su X dalle forme d'ordine l elevato è privo di punti base, (anzi irriducibile dato che ha dimensione dell'ordine di $\frac{1}{n!}\,a\,l^n$ e quindi non può esser composto con un fascio). Da ciò l'asserto e la possibilità della scelta fatta sopra nel testo.

[37] Nel senso che il ricoprimento universale della varietà data è analiticamente equivalente al dominio D.

dello spazio a n dimensioni complesse se in D è risolubile il secondo problema di Cousin.

Per esempio, esiste un teorema di *Appell-Humbert* sopra ogni curva algebrica di genere $\geqslant 1$.

Sur les polynomes orthogonaux dont les dérivés sont orthogonaux

Par

R. Campbell, Caen

(Reçu le 22 Septembre 1956)

L'étude suivante détermine, par la simple considération de la relation de récurrence générale des polynomes orthogonaux, les familles de ces polynomes dont les dérivés sont également orthogonaux. Le même problème avait été traité par *M. Wolfgang Hahn* en 1935 (Cf. Math. Zeitschrift, T. **39**, p. 634) et généralisé par *Krall* (Bull. Amer. Math. Soc., T. **42**, p. 423) par des procédés différents. Mais l'extrême simplicité de la méthode employée ici nous parait digne d'être mentionnée.

M. Favard a démontré[1] qu'étant donné une suite de polynomes $\{\Phi_n\}$ réels, liés par une relation de récurrence de la forme:

$$\Phi_n = (x + r_n)\,\Phi_{n-1} - C_n\,\Phi_{n-2} \qquad (C_n > 0), \tag{1}$$

il est possible de trouver une fonction croissante $\Psi(x)$, (x *réel*) dont les polynomes orthogonaux soient, à un facteur près, ceux de la suite $\{\Phi_n\}$.

On peut déduire de ce résultat un procédé pour déterminer l'ensemble des polynomes orthogonaux $\{P_n(x)\}$ tels que la suite $\{P'_n(x)\}$ satisfasse à la même propriété.

Remarquons que les polynomes Φ_n de (1) sont normés de telle façon que leur terme de plus haut degré ait toujours $+\,1$ comme coefficient.

La relation (1) s'écrit alors, respectivement pour $\{P_n\}$ et $\{P'_n\}$:

$$\begin{cases} P_n = (x + r_n)\,P_{n-1} - C_n\,P_{n-2} & (2) \\ P'_n = \dfrac{n}{n-1}\,(x + \varrho_n)\,P'_{n-1} - \gamma_n\,P'_{n-2} & (3) \end{cases}$$

mais l'équation dérivée de (2) s'écrivant

$$P'_n = (x + r_n)\,P'_{n-1} - C_n\,P'_{n-2} + P_{n-1} \tag{4}$$

[1] Sur les polynomes de *Tschebycheff*. C. R. A. S. Séance du 22 Juin 1935.

il est possible d'éliminer le terme $x\,P'_{n-1}$ entre (3) et (4), d'où il résulte que P_{n-1} est nécessairement une combinaison linéaire de P'_n, P'_{n-1} et P'_{n-2}:

$$P_{n-1} = \frac{1}{n} P'_n + (\varrho_n - r_n) P'_{n-1} + \left(C_n - \gamma_n \frac{n-1}{n}\right) P'_{n-2} \qquad (5).$$

La relation (5) étant valable pour tout n, on peut remplacer, dans (2), P_n, P_{n-1} et P_{n-2} par leurs valeurs tirées de (5), et il doit en résulter que la combinaison linéaire alors obtenue est identiquement nulle, ce qui fournit 4 équations aux différences finies pour les inconnues ϱ_n, r_n, γ_n, C_n. Réciproquement d'ailleurs, si le système de ces 4 équations est vérifié il en est de même de (2) et de (5), donc de (3). Le système allégué est le suivant:

$$(n-1)\,\varrho_n - (n-2)\,r_n = (n+1)\,\varrho_{n+1} - n r_{n+1} \quad (n>2), \qquad (6)$$

$$\left[\gamma_{n+1} - \gamma_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right] - \left[C_{n+1} - C_n\left(1 - \frac{2}{n-1}\right)\right] = (\varrho_n - r_n)^2 \ (n>3), \quad (7)$$

$$(n-1)\,[\varrho_n + \varrho_{n-1} - 2\,r_n]\,\gamma_n + n[r_n + r_{n-1} - 2\,\varrho_{n-1}]\,C_n = 0 \quad (n>4), \quad (8)$$

$$\frac{C_n C_{n-1}}{n-2} - 2\,\frac{C_n \gamma_{n-1}}{n-1} + \frac{\gamma_n \gamma_{n-1}}{n} = 0 \qquad (n \geqslant 5) \qquad (9)$$

Le système de ces 4 équations n'est globalement valable que si $n \geqslant 5$. Pour $n<5$, il y a lieu de former chaque équation particulière. On obtient ainsi les relations existant entre les valeurs des constantes qui interviennent dans les solutions du système.

On pose $P_0 = 1$ et $P_1 = x + r_1$. On obtient alors, par (2):

$$P_2 = (x + r_1)(x + r_2) - C_2$$

comme, d'après (4), $P'_2 = 2(x + \varrho_2)$:

$$\varrho_2 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \qquad (r_2 \text{ et } C_2 \text{ restent arbitraires}).$$

La calcul, analogue, de P_3 et de P'_3 montre que C_3 et r_3 sont arbitraires, mais que

$$\begin{cases} \varrho_3 = \dfrac{1}{6}(r_1 + r_2 + 4\,r_3) \qquad \text{(Cf. équation 6)} \\ \gamma_3 = \dfrac{3}{2}(r_1 + r_2)\,\varrho_3 - (r_1 + r_2 + r_3) + (C_2 + C_3) \end{cases}$$

Le calcul de P_4 et de P_4' détermine ϱ_4, C_4, γ_4 en fonction de $r_1, r_2, r_3, r_4, C_2, C_3$.

A partir de P_5 le système (S) est valable

Résolution de (S).

A) L'équation (9) qui s'écrit aussi

$$C_{n+1}\left[\frac{C_n}{n-1} - \frac{\gamma_n}{n}\right] = \gamma_n\left[\frac{C_{n+1}}{n} - \frac{\gamma_{n+1}}{n+1}\right]$$

prend une forme plus simple si l'on y pose $C_n = \frac{c_n}{n-1}$, $\Gamma_n = \frac{\gamma_n}{n}$.

Elle s'écrit en effet, avec $\frac{C_n}{\Gamma_n} = U_n$:

$$U_n + \frac{1}{U_{n+1}} = 2 \tag{10}$$

(10) montre que U_{n+1} est une fonction homographique de U_n, donc aussi de U_{n-p} soit:

$$U_n = \frac{A_p U_{n-p} + B_p}{C_p U_{n-p} + D_p}$$

(10) fournit aussitôt entre A_p, B_p, C_p, D_p les relations

$$\begin{cases} B_{p+1} = A_p + 2B_p \\ A_{p+1} = -B_p \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{p+1} = -D_p \\ D_{p+1} = C_p + 2D_p \end{cases}$$

B_p et D_p sont ainsi solutions de l'équation

$$X_{p+1} - 2X_p + X_{p-1} = 0$$

B_p et D_p sont donc des fonctions linéaires de p; U_n est fonction homographique de n:

$$U_n = M\frac{n+\alpha}{n+\gamma}$$

et (10) exige aussitôt que $M = 1$ et que γ soit égal à α ou égal à $\alpha + 1$. On a donc finalement 2 cas:

$$U_n = 1 \text{ et } U_n = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+1}$$

1°) $U_n = 1$. Un calcul simple montre que les polynomes répondant à ce cas coincident avec la classe $L_n^{\alpha}(Ax + B)$ (L_n^{α} designant les polynomes de *Laguerre*).

2°) $U_n = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+1}$. Un calcul analogue montre que cette classe est celle des polynomes $J_n^{\alpha,\beta}(A\,x+B)$ ($J_n^{\alpha,\beta}$ designant les polynomes de *Jacobi*).

Ainsi les polynomes répondant à la question posée coincident à une transformation linéaire près sur la variable, avec les polynomes classiques.

Die Unmöglichkeit von $x^6+y^6=z^6$ und $x^9+y^9=z^9$ in quadratischen Körpern

Von

Alexander Aigner, Graz

(Eingegangen am 9. Oktober 1956)

Es werde nun gezeigt, daß die Fermat-Gleichung 6. Grades in keinem quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{m})$ eine Lösung hat. Und zwar dadurch, daß bei keinem kubischen Fermat-Tripel, deren es etwa nach *E. Fogels*[1] in unendlich vielen quadratischen Körpern je unendlich viele gibt, alle drei Zahlen zugleich Quadrate sein können.

Wie ich vorhin[2] ausführte, läßt sich jedes solche kubische Tripel auf „konjugierte Form" bringen, d. i. mit $y=\bar{x}$ zu x konjugiert und z rational. Danach müßten mit irgend einem Zahlenfaktor α aus $K(\sqrt{m})$ zugleich $x\alpha$, $\bar{x}\alpha$, $z\alpha$ Quadrate sein. Da aber mit $x\alpha$ stets auch $\bar{x}\,\bar{\alpha}$ ein Quadrat ist, so wäre dann die Norm $\alpha\,\bar{\alpha}$ ein Quadrat. Eine solche Zahl α ist aber immer mit einer ganz-rationalen Zahl quadrat-verwandt, läßt sich also in dieser Beziehung durch eine quadratfreie rational ganze Zahl g ersetzen. (Ersichtlich auch aus der für $a^2-mb^2=c^2$ gültigen Identität $2(a\pm c)(a+b\sqrt{m})=(a\pm c+b\sqrt{m})^2$.) Dabei kann, wenn $\alpha=a+b\sqrt{m}$ in reduzierter Form mit $(a,b)=1$ vorliegt, g an Primfaktoren nur 2 und Teiler von m enthalten. Somit hätte ein allfälliges Tripel 6. Grades $(gx)^3+(g\bar{x})^3=(gz)^3$ ebenfalls konjugierte Gestalt.

Nun ist aber jedes Tripel 6. Grades auch ein quadratisches (pythagoräisches) und solche sind, wie der Ansatz $(a+b\sqrt{m})^2+(a-b\sqrt{m})^2=c^2$ oder $2mb^2=c^2-2a^2$ sofort zeigt, in konjugierter Form *nicht* möglich, wenn m eine Primzahl der Form $8n+3$ oder $8n+5$ enthält. In diesen Fällen ist also schon unsere Gleichung unlösbar; speziell kann m *nicht durch 3 teilbar* sein, wovon wir im Folgenden Gebrauch machen.

Nun haben die Lösungen $x^3+\bar{x}^3=z^3$ allgemein die Gestalt

---

[1] *E. Fogels*, Über die Möglichkeit einiger diophantischer Gleichungen 3. und 4. Grades in quadratischen Körpern. Comment. math. helv. **10** (1938).

[2] Mh. Math. **56** (1952), 240—252, Kapitel 2.

$$x = 3X^2 + \sqrt{-3(X^4 + 4\,X\,Y^3)}, \qquad z = -6X\,Y$$

Für eine Grundlösung ist stets $(X, Y) = 1$; diese Teilerfremdheit dürfen wir auch in Hinkunft voraussetzen. Und wegen $3 \nmid m$ gilt $3 \nmid Y$. Da muß nun jedenfalls die Norm

$$\mathrm{N}(x) = 12\,X(X^3 + Y^3) \text{ ein Quadrat}$$

sein. Danach ist X (mit positiver Normierung) entweder ein Quadrat, und zwar ein nicht durch drei teilbares, oder ein dreifaches Quadrat. Damit steht übrigens auch für *gerades* m die Unmöglichkeit fest. — Wir setzen also entweder

$$X = k^2, \quad X^3 + 4\,Y^3 = -3\,mn^2 \qquad \text{mit } 3 \nmid k,\ 3 \nmid n$$

oder

$$X = 3\,k^2,\ X^3 + 4\,Y^3 = -mn^2 \qquad \text{mit } 3 \nmid n$$

und die wenigstens bezüglich der ungeraden Teiler gekürzte Form der kubischen Lösung lautet dementsprechend

$$(k^3 + n\sqrt{m})^3 + (k^3 - n\sqrt{m})^3 = (-2\,k\,Y)^3$$

oder

$$(9\,k^3 + n\sqrt{m})^3 + (9\,k^3 - n\sqrt{m})^3 = (-6\,k\,Y)^3.$$

So gelangen wir auf die beiden Bedingungen

$$g(k^3 + n\sqrt{m}) \quad \text{ein Quadrat in } K(\sqrt{m}) \qquad (1)$$

$$-2\,gk\,Y \quad \text{ein Quadrat} \qquad (2)$$

oder

$$g(9\,k^3 + n\sqrt{m}) \quad \text{ein Quadrat in } K(\sqrt{m}) \qquad (1^*)$$

$$-6\,gk\,Y \quad \text{ein Quadrat} \qquad (2^*)$$

mit einer quadratfreien Zahl g, welche höchstens 2 oder Teiler von m enthält — im besonderen also nicht 3.

Nun kann aber g keinen (ungeraden) Teiler von m enthalten. Denn ein solcher teilt $X^3+4\,Y^3$, daher weder X, d. h. k, noch Y und damit wäre (2) bzw. (2*) unerfüllbar, wenn g ihn enthielte. Also bleibt nur $g = 1$ oder $g = 2$, wobei man die Freiheit im Vorzeichen in k hineinziehen kann. Wegen $(k, Y) = 1$ und $3 \nmid Y$ folgt nun aus (2) bzw. (2*) zunächst, daß $Y = \pm u^2$ oder $\pm 2\,u^2$ sein muß.

Und es muß sogar stets ersteres eintreten. Denn für *ungerades* k, das gibt auch ungerades n, wäre bei $g = 1$ nach (1) bzw. (1*) eine Zahl mit ungeradem Irrationalteil ein Quadrat, was nicht sein kann; in

diesem Falle ist also $g = 2$. Für *gerades* k wiederum wird Y von selbst ungerade. — Somit ist stets $|Y|$ ein Quadrat.

Damit führt aber die Bedingung, daß $3X(X^3 + Y^3)$ ein Quadrat ist, auf den Ansatz

$$k^6 \pm u^6 = 3t^2 \qquad (3)$$

oder

$$27k^6 \pm u^6 = t^2 \qquad (3^*)$$

Davon sind (3) mit + und (3*) mit — schon mod. 3 unmöglich. (3) — fällt aber unter ein Ergebnis von *R. Obláth*[3], wonach $x^3 - 1 = 3y^2$ in rationalen Zahlen unlösbar ist. Wir haben uns deshalb nur noch mit (3*) + kurz zu befassen. Hier sind entweder k und u ungerade, $t \equiv 2(4)$ oder k gerade, t und u ungerade (also immer u ungerade). Im ersten Falle setzen wir

$$\frac{u^3 + k^3\sqrt{-27}}{2} = \left(\frac{r + s\sqrt{-27}}{2}\right)^2$$

und erhalten so

$$r^2 - 27s^2 = 2u^3, \qquad rs = k^3,$$

woraus wegen der Teilerfremdheit $r = r_1^3$, $s = s_1^3$ folgt und danach die schon nach *Euler* und *Legendre* unmögliche Beziehung

$$r_1^6 - 27s_1^6 = 2u^3.$$

Im andern Falle haben wir

$$u^3 + k^3\sqrt{-27} = (r + s\sqrt{-27})^2$$

oder

$$r^2 - 27s^2 = u^3 \quad , \quad 2rs = k^3,$$

was zu ebenso unmöglichen Relationen

$$r_1^6 - 16.27\, s_1^6 = u^3 \text{ oder } 16r_1^6 - 27s_1^6 = u^3$$

führt.

Damit erhalten wir den Satz:

Die Gleichung $x^6 + y^6 = z^6$ *ist in jedem quadratischen Körper unmöglich.*

Wir kommen nun zur Gleichung 9. Grades; hier wird die Rechnung sogar einfacher. Wieder gehen wir von einer Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + \bar{x}^3 = z^3$ aus und versuchen $x\alpha$, $\bar{x}\bar{\alpha}$, $z\alpha$ zu Kuben zu machen. Da aber wieder mit $x\alpha$ auch $\overline{x\alpha}$ stets ein Kubus ist, muß der Faktor α so beschaffen sein, daß $\alpha/\bar{\alpha}$ oder $\alpha^2\bar{\alpha} = \beta^3$, eine 3. Zahlpotenz

[3] *R. Obláth*. Über einige unmögliche diophantische Gleichungen. Math. Tidsskr. A 1952, 53—62.

in $K(\sqrt{m})$ ist. Mit $\alpha\,\bar{\alpha}=a$ wird dann aber $\alpha = a^2/\beta^3$, also α kubenverwandt mit einer rational-ganzen Zahl und kann in der Beziehung durch eine kubenfreie ganze Zahl g ersetzt werden. (Analoges gilt auch für andere Potenzen.) Dies ergibt nun, unter Verwendung der vorhin gegebenen Gestalt

$$g(3X^2+\sqrt{-3(X^4+4XY^3)}) \qquad \text{ein Kubus in } K(\sqrt{m})$$

durch Übergang zur Norm

$$g^2 \,.\, 12X(X^3+Y^3) \qquad \text{ein Kubus;}$$

dazu

$$6gXY \qquad \text{ein Kubus.}$$

(Hier erübrigt sich eine nähere Faktorenanalyse.) Und Multiplikation dieser beiden Werte ergibt nun unmittelbar die Bedingung

$$9X^2\,Y(X^3+Y^3) \text{ ein Kubus.}$$

Da müßte wegen der Teilerfremdheit $X^3+Y^3=Z^3$ oder $X^3+Y^3=3Z^3$ sein und beides ist nicht möglich.

Daher gilt auch der Satz:

Die Gleichung $x^9+y^9=z^9$ ist in jedem quadratischen Körper unmöglich.

Eine für die Theorie der relativ-abelschen Körper grundlegende Abelsche Operatorgruppe

Von

G. Kantz, Graz

(Eingegangen am 24. Oktober 1956)

§ 1. Typus und Operatorenbereich der zu untersuchenden Abelschen Gruppe

In der Theorie der relativ-abelschen Körper[1] werden Überlegungen gruppentheoretischer Natur auf Schritt und Tritt verwendet und es wird in dieser Mitteilung eine für obige Theorie grundlegende abelsche Operatorgruppe untersucht, die folgendermaßen erklärt ist: $\mathfrak{G}$ sei eine Abelsche Operatorgruppe mit endlicher Basis und die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung bilde eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ der Ordnung n. Der Operatorenbereich sei der Ring der Polynome in σ mit ganzen rationalen Koeffizienten, wobei σ erklärt ist durch die Gleichung

$$\sigma^l = 1 \qquad l \text{ Primzahl}$$

Setzt man

$$\delta = \sigma - 1 \text{ und } \nu = \sigma^{l-1} + \sigma^{l-2} + \ldots + \sigma + 1$$

so ist ν im Körper der rationalen Zahlen und *a fortiori* im Integritätsbereich der ganzen rationalen Zahlen ein irreduzibles Polynom in σ. Jedes Polynom in σ kann als Polynom vom gleichen Grade in δ geschrieben werden. Als Polynome in δ werden hier nur solche mit ganzen rationalen Koeffizienten verstanden. Es gilt

$$\nu = \delta^{l-1} + \binom{l}{1}\delta^{l-2} + \ldots + \binom{l}{2}\delta + l = l + \delta\, g(\delta),$$

wo $g(\delta)$ ein bestimmtes Polynom in δ ist, woraus sich

[1] Grundlegend für die vorliegende Mitteilung ist die Arbeit von *H. Hasse*: Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper (Sonderabdruck aus dem Jahresber. d. D. M. V. 1930) I., im folgenden mit Hasse I. bezeichnet.

$$l = \nu - \delta\, g(\delta) \tag{1}$$

und

$$\delta^{l-1} = \nu - l\, f(\delta)$$

wobei $f(\delta)$ ganzzahliges Polynom in δ ist.

Nun kann die Gleichheit der Polynomideale (δ^{l-1}, ν), (l, ν) im Bereich der ganzrationalzahligen Polynome in δ behauptet werden.

$$(\delta^{l-1}, \nu) = (l, \nu). \tag{2}$$

Dazu muß nur noch gezeigt werden, daß

$$l \equiv 0 \bmod (\delta^{l-1}, \nu).$$

Aus

$$F(x) = x^{l-1} + x^{l-2} + \ldots + x + 1 = (x - \zeta)(x - \zeta^2) \ldots (x - \zeta^{l-1})$$

(ζ = primitive l-te Einheitswurzel)

folgt

$$F(1) = l = \prod_{i=1}^{l-1} (1 - \zeta^i) = (1 - \zeta)^{l-1} \cdot \frac{1 - \zeta^2}{1 - \zeta} \cdots \frac{1 - \zeta^{l-1}}{1 - \zeta},$$

wobei

$$g(\zeta) = \frac{1 - \zeta^2}{1 - \zeta} \cdots \frac{1 - \zeta^{l-1}}{1 - \zeta}$$

ganzzahliges Polynom in ζ ist, somit

$$l \equiv (1 - x)^{l-1}\, g(x) \bmod F(x)$$

oder

$$l \equiv (1 - \sigma)^{l-1}\, g(\sigma) \bmod F(\sigma) = \nu$$

so daß

$$l = g_1(\delta)\, \delta^{l-1} + g_2(\delta).\nu \quad \text{oder} \quad l \equiv 0 \bmod (\delta^{l-1}, \nu).$$

§ 2. Zwei Hilfssätze für Operatorgruppen

Im folgenden werden zwei für (nicht notwendig abelsche) Operatorgruppen geltende Hilfssätze, die von *H. Hasse*[2] als Reduktionsprinzip und Isomorphieprinzip bezeichnet werden, vorwiegend verwendet.

Hilfssatz 1 (Reduktionsprinzip).

Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ (nicht notwendig abelsch) und $\mathfrak{H}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gilt:

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}$$

Hilfssatz 2 (Isomorphieprinzip).

[2] *H. Hasse* I, S. 58.

Seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, τ ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$, der eine Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ bewirkt, und sei $\mathfrak{K}_1$ jene Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die alle Elemente von $\mathfrak{G}$ umfaßt, die durch den Homomorphismus τ in Elemente von $\mathfrak{K}$ übergehen, so gilt:

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_1 \cong \mathfrak{G}^\tau\,\mathfrak{K}/\mathfrak{H}^\tau\,\mathfrak{K}$$

Dieses Prinzip ist hier etwas allgemeiner formuliert als bei *H. Hasse*[2] bzw. *van der Waerden*[3] und zu seinem Beweis genügen die beiden Hinweise, daß $\mathfrak{K}_1$ leicht als Normalteiler bewiesen werden kann und aus einer Lagrangeschen Klasseneinteilung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_1$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{H}\,\mathfrak{K}_1 G_2 + \ldots$$

(nach beiderseitiger Anwendung des Homomorphismus τ auf diese Relation und darauffolgender Multiplikation mit $\mathfrak{K}$) wieder eine gleichgliedrige Lagrangesche Klasseneinteilung von $\mathfrak{G}^\tau\,\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{H}^\tau\,\mathfrak{K}$ folgt.

§ 3. Untergruppen der abelschen Operatorgruppe

In $\mathfrak{G}$ werden folgende Untergruppen erklärt:

$\mathfrak{A}$ als Gesamtheit der Elemente, deren δ-te Potenzen in $\mathfrak{Z}$ liegen.

$\mathfrak{B}$ als Gesamtheit der Elemente, deren ν-te Potenzen in $\mathfrak{Z}$ liegen.

$\overline{\mathfrak{A}}$ als Gesamtheit der Elemente, deren δ-te Potenzen gleich E sind.

$\overline{\mathfrak{B}}$ als Gesamtheit der Elemente, deren ν-te Potenzen gleich E sind.

Es gilt also:

$$\mathfrak{A}^\delta \equiv E(\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}) \qquad \mathfrak{B}^\nu \equiv E(\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z})$$
$$\overline{\mathfrak{A}}^\delta = E \qquad \overline{\mathfrak{B}}^\nu = E$$
$$\overline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A} \qquad \overline{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{B}$$

Satz 1. $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$.

Beweis: Ist G ein Element des linksseitigen Durchschnitts, so ist sowohl G^δ als auch G^ν somit wegen § 1, (1) auch G^d in $\mathfrak{Z}$ gelegen. G^d ist also Element endlicher Ordnung, also auch G. G liegt daher in $\mathfrak{Z}$. Ist umgekehrt G ein Element aus $\mathfrak{Z}$, so ist $G^n = E$, wenn n die Ordnung von $\mathfrak{Z}$ ist, also $(G^\delta)^n = (G^n)^\delta = E$, somit $G^\delta \equiv E(\mathfrak{Z})$ und G ein Element von $\mathfrak{A}$. Weiter ist $(G^\nu)^n = (G^n)^\nu = E$, also $G^\nu \equiv E(\mathfrak{Z})$, somit G auch Element aus $\mathfrak{B}$. Daher ist

$$G \equiv E(\mathrm{mod}\ \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}) \qquad \text{w.z.b.w.}$$

---

[3] Bezüglich des Beweises sei auf *van der Waerden*, Algebra I, 1955, Seite 150, verwiesen.

Satz 2. Alle Elemente von $\mathfrak{G}$, die durch den Homomorphismus δ in Elemente von $\mathfrak{A}$ übergeführt werden, sind die Elemente von $\mathfrak{A}$ selbst.

Aus $G \in \mathfrak{G}$ und $G^\delta \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{A})$ folgt $G^{\delta^2} \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z}) \ldots G^{\delta^l} \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z})$, aber auch $G^{\delta\nu} \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z})$ wegen $G^{\delta\nu} = G^{\sigma^{l-1}} = E$, somit

$$G^{l\delta} = (G^\delta)^l \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z})$$

wegen der aus § 1, (1) folgenden Relation

$$l\,\delta = \nu\,\delta - \delta^2\, g(\delta)$$

G^δ ist also Element endlicher Ordnung aus $\mathfrak{G}$, also $G^\delta \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{Z})$ und $G \equiv E (\mathrm{mod}\, \mathfrak{A})$ w.z.b.w.

Satz 3. $\mathfrak{G}^{\delta^{l-1}}\, \mathfrak{G}^\nu = \mathfrak{G}^l\, \mathfrak{G}^\nu$, dies folgt aus § 1, (2).

§ 4. Einige Indicesrelationen

Es werde in der durch das Isomorphieprinzip gegebenen Beziehung für $\mathfrak{G}$ die in § 1 erklärte Operatorgruppe, für τ der Homomorphismus δ und für $\mathfrak{R}$ die Operatoruntergruppe $\mathfrak{A}$ gewählt. Dann ist wegen Satz 2 $\mathfrak{A}$ für $\mathfrak{R}_1$ zu setzen. Man erhält so wegen $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^{\delta^2}\, \mathfrak{A}$$

Berücksichtigt man, daß $\mathfrak{A}$ auch sämtliche Elemente von $\mathfrak{G}^{\delta^i}\, \mathfrak{A}$, die durch den Homomorphismus δ in $\mathfrak{A}$ übergeführt werden, enthält, so gibt wiederholte Anwendung des Isomorphieprinzipes folgende Relationenkette:

A. $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^{\delta^2}\, \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}^{\delta^2}\, \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^{\delta^3}\, \mathfrak{A} \sim \ldots \simeq \mathfrak{G}^{\delta^{l-2}}\, \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^{\delta^{l-1}}\, \mathfrak{A}$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{G}^{\delta^{l-1}}\, \mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A}$, da $\mathfrak{G}^{\delta^{l-1}}\, \mathfrak{A} = \mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A}$ aus Satz 3 und mit Rücksicht auf $\mathfrak{G}^\nu \subseteq \mathfrak{A}$ folgt, so ergibt die Relationskette A die Indizesrelation

$$(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A})\, (\mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A} : \mathfrak{G}^{\delta^2}\, \mathfrak{A}) \ldots (\mathfrak{G}^{\delta^{l-2}}\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{\delta^{l-1}}\, \mathfrak{A})$$

bzw.

$$(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^\delta\, \mathfrak{A}) = \sqrt[l-1]{(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A})} = \sqrt[l-1]{\frac{\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^l}{\mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A} : \mathfrak{G}^l}}$$

Anwendung des Reduktionsprinzipes gibt

$$\mathfrak{G}^l\, \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^l \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{G}^l \cap \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^l$$

und es gilt somit

B. $$(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^\delta \mathfrak{A}) = \sqrt[l-1]{\frac{\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^l}{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^l}}.$$

Nimmt man im Isomorphieprinzip $\overline{\mathfrak{B}}$ für $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R} = \{E\}$ ferner ν für τ, so gilt

$$\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} \simeq \mathfrak{G}^\nu/\overline{\mathfrak{A}}^\nu \simeq \mathfrak{G}^\nu/\overline{\mathfrak{A}}^l$$

letzteres wegen § 1, (1).

Weiter gilt unter Berücksichtigung von $\mathfrak{G}^\delta \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$

$$\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}} \simeq \overline{\mathfrak{B}}/\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}} \text{ (Reduktionsprinzip).}$$

Ein Element von $\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}}$ hat die Form $G^\delta\,\overline{A}$, wobei $G^{\delta\nu}\,\overline{A}^\nu = E$, also $\overline{A}^\nu = E$ und (wegen gleichzeitigem $\overline{A} = E$) $\overline{A}^l = E$ folgt. Somit ist $\overline{A} \equiv E(\mathfrak{Z})$ und alle Elemente von $\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Z}$ erfüllen $x^l = E$.

Wegen $\mathfrak{G}^\delta \subseteq \mathfrak{B}$ ist dann

$$\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}}$$

Es gilt also

$$(\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}}) = (\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}}) = (\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}}).$$

Weiter gibt das Reduktionsprinzip

$$\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{G}^\delta \simeq \overline{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}}$$

und es gilt die Kette der Indizesrelationen

$$(\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta) = (\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}})\,(\mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta) = (\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{Z}})\,(\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}}) =$$

$$= (\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}})\,(\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}}) = \frac{(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}})}{(\mathfrak{G} : \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}})}\,(\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}}) =$$

$$= \frac{(\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}})}{(\mathfrak{G}^\nu : \overline{\mathfrak{A}}^l)}\,(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^\delta\,\mathfrak{A})\,(\mathfrak{G}^\delta\,\mathfrak{A} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}})$$

und unter Verwendung von B und Breücksichtugung von

$$(\mathfrak{G}^\delta\,\mathfrak{A} : \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}}) = (\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}}) \text{ (Reduktionsprinzip)}$$

erhält man schließlich die Formel

C. $$(\mathfrak{B} : \mathfrak{G}^\delta) = \frac{(\overline{\mathfrak{Z}} : \mathfrak{G}^\delta \cap \overline{\mathfrak{Z}})\,(\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{G}^\delta\,\overline{\mathfrak{A}})}{(\mathfrak{G}^\nu : \overline{\mathfrak{A}}^l)} \sqrt[l-1]{\frac{\mathfrak{G} : \mathfrak{G}^l}{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}^l}}.$$

§ 5. Anwendungen der Formel C

Die Schlußformel C von § 4 soll auf die Gruppe „$\overline{\mathfrak{E}}_0$" der Einheiten eines über dem algebraischen Körper k relativ zyklischen Oberkörper K vom Relativgrad l (Primzahl) angewendet werden. Dabei sei σ der erzeugende Automorphismus von K bzgl. k. Nach einem bekannten Satze

von Dirichlet besitzt die Gruppe $\overline{\mathfrak{E}}_0$ den Typus der in § 1 erklärten Abelschen Operatorgruppe $\mathfrak{G}$. Ersetzt man

$$\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^\delta, \mathfrak{G}^\nu, \mathfrak{A}, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{Z}}$$

der Reihe nach durch

$$\overline{\mathfrak{E}}_0, \overline{\mathfrak{E}}_0^\delta, \overline{\mathfrak{E}}_0^\nu, \overline{\mathfrak{E}}_\delta, \mathfrak{E}_0, \overline{\mathfrak{E}}_\nu, \mathfrak{Z}_l$$

wobei

$\overline{\mathfrak{E}}_\delta$ die Gruppe der Einheiten in K, deren δ-te Potenzen Einheitswurzeln in K sind,

$\mathfrak{E}_0$ die Gruppe der Einheiten in k,

$\overline{\mathfrak{E}}_\nu$ die Gruppe der Einheiten in K, deren Relativnorm bezüglich k gleich 1 ist, und

$\mathfrak{Z}_l$ die Gruppe der l-ten Einheitswurzeln aus K (die dann aber schon in k gelegen sein müssen)

bedeutet, so spezialisiert sich C zu

$$\text{C}'. \qquad (\overline{\mathfrak{E}}_\nu : \overline{\mathfrak{E}}_0^\delta) = \frac{(\mathfrak{Z}_l : \overline{\mathfrak{E}}_0^\delta \cap \mathfrak{Z}_l)\,(\overline{\mathfrak{E}}_\delta : \overline{\mathfrak{E}}_\delta \cap \overline{\mathfrak{E}}_0^\delta\, \mathfrak{E}_0)^{l-1}}{(\overline{\mathfrak{E}}_0^\nu : \overline{\mathfrak{E}}_0^l)} \sqrt{\frac{\overline{\mathfrak{E}}_0 : \overline{\mathfrak{E}}^l}{\overline{\mathfrak{E}}_\delta : \overline{\mathfrak{E}}_\delta^l}}$$

Die Berechnung der beiden $\overline{\mathfrak{E}}_\delta$ enthaltenden Indizes auf der rechten Seite von C′ wurde in einer von mir veröffentlichten Arbeit[4] dargelegt. Es berechnet sich, wie dort gezeigt, dann leicht die sogenannte *Einheitenhauptgeschlechtsordnung* „$(\overline{\mathfrak{E}}_\nu : \overline{\mathfrak{E}}^\delta)$".

[4] Atti IV. Congr. Un. mat. Ital. 2, 131—138 (1953).

On Representations of the Full Linear Group and Some of its Subgroups over Infinite Fields of Prime Characteristic

By

W. E. Jenner

(Received November 19, 1956)

It has been shown by *Jacobson* and *Zassenhaus* that for any Lie algebra of finite dimension over a field of prime characteristic the degrees of the absolutely irreducible representations are bounded. In this paper it is shown that the analogous statement for algebraic groups is not true in general. More precisely, if k is any infinite field then for $n > 1$ the full linear group $GL(n, k)$ and the special linear group $SL(n, k)$ and for $n \geq 1$ the symplectic group $Sp(2n, k)$ have rational irreducible representations of arbitrarily high degree. This result is new only in the case of fields of prime characteristic, thus providing a further example of how dimly the properties of algebraic groups over such fields are reflected in their Lie algebras. (For the definition of the Lie algebra of an algebraic group see [2].)

The general problem of determining the structure of the tensor representations of the classical groups over fields of prime characteristic appears to be very difficult and no attempt is made to deal with it in this paper. For the full linear group this problem has been studied by *Thrall* [4]. It would be desirable to investigate more closely the case of infinite ground fields since then the classical groups are perhaps more interesting, and certainly more tractable, from the point of view of algebraic geometry. Furthermore in this case *Weyl's* principle of irrelevance of algebraic inequalities is still valid and it can be proved as usual that $GL(n, k)$ induces the full algebra of bisymmetric transformations on the space of tensors of any given rank, so that the connection with the symmetric group can be established. However, it is shown in the proof of Theorem 1 that the representation of $GL(n, k)$ on the space

of symmetric tensors of given rank can be reducible, and clearly symmetry operators will not pick out the unique irreducible subspace that exists in this case. This suggests that perhaps some quite new approach may be more appropriate for constructing the irreducible representations.

The author is indebted to *M. Rosenlicht* for several helpful comments, in particular for suggesting the device used in the proof of Theorem 1. The work on this paper was done while the author was recipient of a research grant from Northwestern University during the summer of 1956.

It will be assumed that a fixed realization of $GL(n, k)$ as a group of matrices has been chosen. Let $\mathfrak{V}$ be the vector space over k of homogeneous polynomials of degree r in indeterminates $X_1, \ldots, X_n$. For $\Phi = (a_{ij}) \varepsilon GL(n, k)$ the mapping $X_i \to \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$ induces a linear transformation $\Phi^{(r)}$ on $\mathfrak{V}$. The mapping $\Phi \to \Phi^{(r)}$ is a representation of $GL(n, k)$ which is rational in the sense that the coefficients of $\Phi^{(r)}$ are rational functions (actually polynomial functions) of the coefficients of Φ. This representation is equivalent to the representation of $GL(n, k)$ on the space of symmetric tensors of rank r (cf. [5]).

Theorem 1: Let k be an infinite field. Then for $n > 1$ the groups $GL(n, k)$ and $SL(n, k)$ have rational irreducible representations of arbitrarily high degree.

Proof: First consider the representation $\Phi \to \Phi^{(r)}$ of the group $GL(2, k)$. Suppose that $\mathfrak{W}$ is an invariant subspace of $\mathfrak{V}$ and that $f = \Sigma c_{ij} X_1^i X_2^j$ $(c_{ij} \varepsilon k)$ is a non-zero element of $\mathfrak{W}$. A matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ of $GL(2, k)$ maps f into $f_1 = \Sigma c_{ij} a^i b^j X_1^i X_2^j \varepsilon \mathfrak{W}$. Since k is infinite, the elements a and b can be chosen so that the $a^i b^j$ are all distinct. Then by subtracting an appropriate multiple of f_1 from f, and iteration of this process, it is shown easily that $\mathfrak{W}$ contains each monomial $X_1^i X_2^j$ that occurs effectively in f. The matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ of $GL(2, k)$ maps $X_1^i X_2^j$ into $X_1^i (X_1 + X_2)^j \varepsilon \mathfrak{W}$. Repeating the previous argument, it follows that $X_1^r \varepsilon \mathfrak{W}$. This shows that if $\mathfrak{V}$ is reducible then it is not completely reducible; furthermore $\mathfrak{V}$ contains a unique irreducible subspace, namely that spanned by the images of X_1^r. Note that if k has characteristic $p > 0$ and $r \equiv 0 \pmod{p}$ then this irreducible subspace is a proper subspace of $\mathfrak{V}$. Now suppose $\mathfrak{W}$ is a non-zero irreducible invariant subspace of $\mathfrak{V}$. Then $\mathfrak{W}$ will contain all images of X_1^r under the matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $GL(2, k)$ and so will contain all monomials that appear effectively in the binomial expansion of $(X_1 + X_2)^r$. If k has characteristic zero then the number of such monomials is $r + 1$ and so $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}$. Then $\mathfrak{V}$ itself is irreducible and the theorem is proved for $GL(2, k)$ in this case since r can be taken arbitrarily large. Note also that $\mathfrak{V}$ is irreducible whenever r is smaller than the characteristic of the ground field. In general, however, if k has characteristic $p > 0$ it suffices to take $r = \Sigma_{i=0}^{m} p^i$ since then $\binom{r}{t} \not\equiv 0 \pmod{p}$ for $t = 1, p, p^2, \ldots, p^m$. To show this, let u be an indeterminate over k and consider the binomial expansion of $(1 + u)^r$. Now $(1 + u)^r = (1 + u)(1 + u^p) \ldots (1 + u^{p^m})$ and when the product on the right hand side is multiplied out term by term, no two terms cancel (additively) by virtue of the uniqueness of the p-adic expansion of a rational integer. It follows that $\binom{r}{t} \not\equiv 0 \pmod{p}$ for $t = 1, p, p^2, \ldots, p^m$. Since m can be chosen arbitrarily large, the theorem is now proved for $GL(2, k)$. The case where $n > 2$ is treated similarly. One shows first that $X_1^r \varepsilon \mathfrak{W}$ as before, and then the remainder of the argument works if attention is restricted to the subgroup of $GL(n, k)$ consisting of matrices of the form $\begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ where $\Phi \varepsilon GL(2, k)$ and I is the unit matrix of degree $n - 2$. To prove the theorem for $SL(n, k)$, note that $GL(n, k) = k^* \cdot SL(n, k)$ where $k^* = k - (0)$ and so every subspace of $\mathfrak{V}$ invariant under $SL(n, k)$ is also invariant under $GL(n, k)$. q. e. d.

The symplectic group $Sp(2n, k)$ consists of those linear transformations of a vector space over k which leave invariant a given non-degenerate alternating bilinear form. The dimension of such a space is necessarily even. For appropriate choice of basis, $SP(2n, k)$ can be realized as the group of matrices Φ of degree $2n$ satisfying ${}^t\Phi E \Phi = E$ where $E = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, I denoting the unit matrix of degree n (cf. [1], [5]). It will be assumed that such a basis has been chosen. Then the matrices

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & {}^t\Phi^{-1} \end{pmatrix} \text{ where } \Phi \varepsilon GL(n, k) \text{ and } \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} I & a_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_n \\ \hline 0 & & I & \end{array}\right) \text{ where}$$

$a_1, \ldots, a_n \varepsilon k$, belong to $Sp(2n, k)$.

Theorem 2: Let k be an infinite field. Then for $n \geq 1$ the group $Sp(2n, k)$ has rational irreducible representations of arbitrarily high degree.

Proof: The case $n = 1$ follows from Theorem 1 since $Sp(2, k) = SL(2, k)$ (cf. [3]); so suppose $n > 1$. The representation of $GL(2n, k)$ on the space $\mathfrak{P}$ of homogeneous polynomials of degree r in $2n$ indeterminates induces a representation of $Sp(2n, k)$ on this space. Let the first n indeterminates be $X_1, \ldots, X_n$ and the last n be $Y_1, \ldots, Y_n$. Let $\mathfrak{W}$ be a subspace of $\mathfrak{P}$ invariant under $Sp(2n, k)$ and suppose $f = \Sigma c_{(r)(s)} X_1^{r_1} \ldots X_n^{r_n} Y_1^{s_1} \ldots Y_n^{s_n} (c_{(r)(s)} \varepsilon k)$ is a non-zero element of $\mathfrak{W}$. Suppose some X_i occurs effectively in f. Then $\Lambda(f) = \Sigma c_{(r)(s)} (X_1 + a_1 Y_1)^{r_1} \ldots (X_n + a_n Y_n)^{r_n} Y_1^{s_1} \ldots Y_n^{s_n} \varepsilon \mathfrak{W}$. The sum of all terms of $\Lambda(f)$ involving effectively only the Y_i is $\Sigma c_{(r)(s)} a_1^{r_1} \ldots a_n^{r_n} Y_1^{r_1+s_1} \ldots \ldots Y_n^{r_n+s_n}$. Since k is infinite, the elements $a_1, \ldots, a_n \varepsilon k$ can be chosen so that $\Lambda(f) - f$ has strictly positive degree in the Y_i and has degree in the X_i strictly less than the degree in the X_i of f. Iteration of this process leads to a polynomial $g \neq 0$ in $\mathfrak{W}$ in which only the Y_i occur effectively. Then it suffices to consider the dimension of the space spanned by the images of g under those symplectic transformations of type Γ. But this is precisely the situation considered in the proof of Theorem 1 and so Theorem 2 follows immediately. q. e. d.

References

[1] *C. Chevalley*, Theory of Lie Groups I, Princeton 1946.

[2] *C. Chevalley*, Théorie des Groupes de Lie II, Paris 1951.

[3] *J. Dieudonné*, La Géométrie des Groupes Classiques, Berlin 1955.

[4] *R. M. Thrall*, On the Decomposition of Modular Tensors, I and II. Ann. of Math. **43** (1942), 671—684 and **45** (1944), 639—657.

[5] *H. Weyl*, The Classical Groups, Princeton 1946.

Northwestern University,
Evanston Ill., USA.

Buchbesprechungen

Erwachende Wissenschaft. Von *B. L. van der Waerden.* (Wissenschaft und Kultur: Band 8.) Mit 180 Textabb., 488 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1956. sfr. 37.50, DM 37.50.

In seiner Rezension des 1950 unter dem Titel „Ontwakende Wetenschap" in holländischer Sprache erschienenen Originals dieses Buches (siehe Band 55 der „Monatshefte") sprach *L. Schmetterer* die Annahme aus, daß das Werk — eine Darstellung des heutigen Wissens über die Mathematik der Ägypter, Babylonier und Griechen — wegen seiner großen Bedeutung bald in andere Sprachen übersetzt werden würde. Tatsächlich ist seither schon eine englische Ausgabe des Buches erschienen, und nunmehr liegt also auch die deutsche Fassung vor. Sie weist gegenüber dem Original verschiedene Verbesserungen und Erweiterungen des Textes auf, daneben wurde — so wie in der englischen Ausgabe — das Bildmaterial stark vermehrt; man kann nun auch die Ausstattung des Bandes, der für den Mathematiker und den Historiker gleich wertvoll ist, mit vollem Recht als großartig bezeichnen. *W. Nöbauer*, Wien

Kettenbrüche. Von *A. Khintchine.* Übersetzt nach der zweiten Auflage von *V. Ziegler.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 3.) 96 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 5.40.

Das vorliegende Buch besteht aus einem elementaren Teil über die regelmäßigen Kettenbrüche und über die metrische Theorie der Kettenbrüche, über die ja der Verfasser ein anerkannter Meister ist. Die Übersetzung liest sich im allgemeinen flüssig. *E. Hlawka*, Wien

Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. Von *P. S. Alexandroff.* Mit 25 Textabb., XII, 279 S. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956.

Das Buch ist eine deutsche Übersetzung der 1948 erschienenen russischen Ausgabe. Es beinhaltet der Hauptsache nach eine Einführung in die abstrakte Mengenlehre sowie in die Theorie der metrischen und der topologischen Räume, wogegen die Theorie der Funktionen sehr zurücktritt.

In Kap. I werden die Grundbegriffe der Mengenlehre vom vorkritischen Standpunkt aus eingeführt und die einfachsten Mächtigkeitssätze bewiesen. — Kap. II behandelt die Dedekindsche Theorie der Irrationalzahlen, ferner die Entwicklung der reellen Zahlen in dyadische Brüche. — Kap. III ist eine recht ausführliche, in sich geschlossene Darstellung der geordneten Mengen sowie der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen. — In Kap. IV werden die Elemente der linearen und z. T. der ebenen Punktmengen zusammengestellt und hierdurch die Grundlage für Kap. V gelegt, welches die Grundtatsachen der reellen Analysis der Funktionen von einer und z. T. von zwei Variablen bringt. Insbesondere sind der *Weierstraß*sche Approximationssatz für Funktionen einer Variablen mit dem konstruktiven Beweis von *S. N. Bernstein* aufgenommen, ferner die *Baire*sche

Klassifikation jener Funktionen. — Die umfangreichen Kap. VI und VII behandeln die metrischen Räume. Die Theorie wird zunächst in mehr oder weniger üblicher Weise für allgemeine metrische Räume aufgebaut und dann werden die Räume spezialisiert; dabei werden der Reihe nach die Räume mit einer abzählbaren Basis, sodann die kompakten, die vollständigen und schließlich die lokalkompakten Räume herausgehoben. Von der Fülle an Sätzen sei die weniger bekannte Charakterisierung der Mengen eines kompakten metrischen Raumes erwähnt, die zugleich ein F_σ und ein G_δ sind. Ferner sei auf ein relativ durchsichtiges Beispiel für ebene Kontinua hingewiesen, die drei bzw. mehr disjunkte einfach-zusammenhängende Gebiete der Ebene begrenzen. — Zwei Anhänge sind den topologischen Räumen, als Verallgemeinerung der metrischen, gewidmet. Die topologischen Räume werden zunächst in voller Allgemeinheit betrachtet und dann verschiedenen Einschränkungen unterworfen. Neben die „quantitative" Forderung einer abzählbaren Basis treten vor allem Trennungsaxiome (insbesondere das *Hausdorff*sche), ferner die Forderung, daß der Raum bikompakt sein soll (d. h., daß jedes System von offenen Mengen, das den Raum überdeckt, ein endliches Teilsystem mit derselben Eigenschaft enthalten soll). Die Darstellung reicht bis zu den Metrisationssätzen von *Urysohn* und den Produkt- und Einbettungssätzen von *Tychonoff*. — Ein weiterer Anhang über konvergente Folgen stetiger Funktionen mit einer stetigen Grenzfunktion bildet den Abschluß des Werkes.

Das Buch ist trotz des z. T. sehr abstrakten Gegenstandes durchwegs anregend geschrieben und flüssig lesbar, wozu die zahlreichen Beispiele und Gegenbeispiele wesentlich beitragen. Die Kap. I, II, IV, V bilden für sich ein einführendes Lehrbuch in die reelle Analysis, das bereits für Anfänger geeignet ist, während die übrigen Teile eine gewisse Gewandtheit im abstrakten Denken voraussetzen. In diesen Teilen wird Verwandtes, das zunächst auseinander zu liegen scheint, immer wieder an passender Stelle verbunden und so ein festgefügtes Ganzes geschaffen, wie es nur ein Autor imstande ist, der souverän über dem Stoff steht.

K. Mayrhofer, Wien

Das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Von *E. Kamke*. Mit 24 Textabb., VI, 226 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. Geb. DM 20.—.

Das im Mittelpunkt des Buches stehende Lebesgue-Stieltjessche Integral der Funktionen von n reellen Variabeln wird mittels eines verallgemeinerten Lebesgueschen Maßes eingeführt. Um dieses Maß (Kap. II) für Punktmengen des R_n zu erhalten, geht man von einer additiven Intervallfunktion $\varphi(j) \geqq 0$ aus, die für die abgeschlossenen Intervalle j des R_n definiert ist. Damit ergibt sich zunächst ein Maß für die offenen Mengen G des R_n: man stellt G als Vereinigung von abzählbar vielen, nicht übereinandergreifenden Intervallen j_k so dar, daß jeder beschränkte, abgeschlossene Teil von G durch endlich viele j_k überdeckt wird; $\Sigma\varphi(j_k)$ ist dann unabhängig von der gewählten Darstellung von G und gilt als Maß von G. Das (äußere) φ-Maß irgend einer Menge M des R_n ist dann das Infimum der Maße der offenen Obermengen von G; dabei fallen für die offenen Mengen das ursprüngliche Maß und das φ-Maß zusammen. Schließlich heißt M φ-meßbar, falls es ein überdeckendes G gibt, so daß das (äußere) φ-Maß von $G-M$ beliebig klein wird. Das so erklärte φ-Maß sowie die φ-Meßbarkeit fallen unter die Maßtheorie *Carathéodorys*. Für das φ-Maß kann völlig analog wie für das Lebesguesche Maß eine Theorie der meßbaren Funktionen entwickelt werden (Kap. III). Weiters führt das φ-Maß der Punktmengen des R_n zum Lebesgue-Stieltjesschen Integral der Funktionen $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ (Kap. IV). Um zunächst

im einfachsten Falle zu diesem Integral zu gelangen, muß für die (n-dimensionalen) Intervalle j des $x_1, \ldots, x_n$-Raumes die „Eichfunktion" $\varphi(j)$ gegeben sein und $f \geqq 0$ vorausgesetzt werden; ferner hat man mittels $\varphi(j)$ auf bestimmte, einfache Weise eine Eichfunktion $\Phi(I)$ für die ($n+1$-dimensionalen) Intervalle I des $x_1, \ldots, x_n, y$-Raumes zu bilden. Das obere Lebesgue-Stieltjessche Integral von f bezüglich des „Integrators" φ ist dann das (äußere) Φ-Maß der (im $x_1, \ldots, x_n, y$-Raume liegenden) Ordinatenmenge von f. Dieses obere Integral heißt Lebesgue-Stieltjessches Integral schlechthin, falls der Definitionsbereich von f φ-meßbar und die Ordinatenmenge Φ-meßbar ist. Bei Funktionen f, deren Werte beliebiges Vorzeichen haben können, sowie für allgemeinere Integratoren $\varphi(j)$, wird die Erklärung des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals auf den eben betrachteten Fall zurückgeführt. Wählt man insbesondere für $\varphi(j)$ den elementaren Inhalt von j, so wird das φ-Maß zum Lebesgueschen Maß im R_n und das Lebesgue-Stieltjessche Integral zum Lebesgueschen. Eine Verallgemeinerung des letzten Integrals bei gehörigem Integrationsbereich ist das Integral von *Perron-Bauer*. Für Funktionen einer Variabeln ermöglicht es erst dieses Integral (Kap. V) u. a. von einer (endlichen) Ableitung $f'(x)$ durch Integration zur Funktion $f(x)$ zurückzugelangen. — Die benötigten Hilfsmittel über Mengen sind in Kap. I zusammengestellt.

Das Buch geht über den Rahmen der vom Verf. 1923 gegebenen Darstellung des Lebesgueschen Integrals der beschränkten Funktionen $f(x)$ weit hinaus und hat mit ihr kaum mehr als die grundsätzliche Anlage gemeinsam. Bis auf die Transformation der mehrfachen Integrale durch Einführung von neuen unabhängigen Veränderlichen ist der Gegenstand mit großer Vollständigkeit behandelt. Insbesondere werden die Funktionen einer Variabeln herausgehoben und dabei der Sonderfall des Lebesgueschen Integrals ausführlich für sich betrachtet. Die hervorragende Bearbeitung des Stoffes und dessen klare Darstellung gewährleisten ein ersprießliches Studium sowie ein rasches und sicheres Nachschlagen. — Sprachlich sei bemerkt, daß S. 100 die Bezeichnung „fast gleichmäßig konvergent" an Stelle der sonst auftretenden „nahezu gleichmäßig konvergent" eingeführt wird, was eine gewisse Diskrepanz bei der Verwendung des Wörtchens „fast" nach sich zieht.

K. Mayrhofer, Wien

Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Von *S. Stoilow*. Zweite Auflage. XVI, 194 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten Auflage durch Hinzufügen von drei Noten im Anhang, welche bisher nur in schwer zugänglichen Originalarbeiten des Verfassers verfügbar waren, sowie durch einige wenige vereinfachende Bemerkungen zum Text der ersten Auflage.

Das Buch beginnt mit einer Auseinandersetzung der Grundtatsachen über topologische Räume und einem Beweis des Brouwerschen Satzes über die Invarianz der (n-dimensionalen) offenen Mengen bei topologischen Abbildungen mittels des Lebesguesschen Pflastersatzes. Das zweite Kapitel bringt die Begriffe „Riemannsche Fläche" und „Funktion" auf einer Riemannschen Fläche", wobei die Existenz der letzteren mit den Methoden von *Courant* und *Fatou* (Dirichletsches Prinzip) bewiesen wird. Nun werden die topologischen Eigenschaften der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten entwickelt (Flächentopologie) und gezeigt, daß die Riemannschen Flächen in topologischer Hinsicht unter diesen durch die Eigenschaften der Orientierbarkeit und Triangulierbarkeit gekennzeichnet sind. Zum Vergleich werden Beispiele nicht orientierbarer bzw. nicht

triangulierbarer Mannigfaltigkeiten angegeben. In Fortsetzung der eben genannten Gegenstände bringt Kap. 4 die Klassifikation der Flächen übrigens auch für die offenen Flächen. Das zentrale Problem der Theorie wird im 5. Kapitel besprochen. Es handelt sich dabei um die Charakterisierung des Begriffes „analytische Funktion" in topologischer Hinsicht. So wie unter den zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten nur die orientierbaren und triangulierbaren als topologische Bilder Riemannscher Flächen in Frage kommen, so kommen unter den stetigen Transformationen einer solchen Mannigfaltigkeit A in eine andere B nur sogenannte „Innere Transformationen" (transformations intérieures) in Frage, wenn man verlangt, daß es eine topologische Transformation geben soll, welche A in eine Riemannsche Fläche und die genannte stetige Transformation in eine analytische Funktion auf dieser Fläche (also B in die komplexe Zahlenkugel) verwandeln soll. Eine stetige Transformation heißt innere Transformation, wenn sie die offenen Mengen wieder in solche überführt und niemals ein Kontinuum in einen einzigen Punkt überführt. Man verdankt dem Verfasser das Resultat, daß die analytischen Funktionen in topologischer Hinsicht mit diesen inneren Transformationen äquivalent sind. Das Schlußkapitel bringt noch zahlreiche Untersuchungen in dieser Richtung z. B. über die asymptotischen Werte einer analytischen Funktion auf einer Riemannschen Fläche. Hervorzuheben ist die besonders gute Lesbarkeit und voraussetzungslose Darstellungsweise des Buches.

K. Prachar, Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von *A. Duschek*. I. Band: Integration und Differentiation der Funktionen einer Veränderlichen. Anwendungen. Numerische Methoden. Algebraische Gleichungen. Unendliche Reihen. Zweite, neu bearbeitete Auflage. Mit 169 Textabb., XII, 440 S. Wien: Springer-Verlag. 1956. S 270.—, DM 45.—, $ 10.70, sfr. 46.10; geb. S 288.—, DM 48.—, $ 11.45, sfr. 49.10.

Die erste Auflage fand eine sehr günstige Kritik (in dieser Zeitschrift Mh. Math. **54**, 79 (1950)). Obwohl die Auflage groß war, wurde schon nach sechs Jahren eine Neuauflage notwendig. In der Stoffanordnung unterscheidet sich die zweite Auflage gegenüber der ersten hauptsächlich darin, daß die unendlichen Reihen in den ersten Band verlegt wurden, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung geschlossen im zweiten Band erscheinen soll. Der Autor hat sich die Mühe gemacht, den ganzen Stoff einer gründlichen Revision zu unterziehen. Wenig geändert wurden die Kapitel über numerisches Rechnen, über Regeln und Methoden. Hingegen wurden die Abschnitte über die grundlegenden Begriffe und Sätze stark umgearbeitet und erweitert. So enthält der erste Abschnitt (Zahlen und Zahlenfolgen) jetzt 55 Seiten gegenüber 30 Seiten von früher. Der Autor hat sich mit Erfolg bemüht, der Darstellung eine bessere Fundierung zu geben und ist damit einen Schritt in der Richtung zur Strenge hin weiter gegangen. Besonders gilt dies bei den Paragraphen über den Zahlbegriff, über Punktmengen, Folgen, Konvergenz, Grenzwert, Funktionsbegriff, Stetigkeit, Integralbegriff, unbestimmte Formen. Erwähnen möchte ich auch, daß manche Beweise vereinfacht wurden, wie beim Kernsatz der Differential- und Integralrechnung, und manches neu aufgenommen wurde, wie das Stieltjessche Integral.

N. Hofreiter, Wien

Modern Mathematics for the Engineer. Herausgegeben von *E. Beckenbach*. XX, 514 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1956. $ 7.50.

Ausgehend von der Tatsache, daß viele Ingenieure viel umfangreichere Kenntnisse aus der Mathematik brauchen, als sie an den Kursusvorlesungen der Technischen Hochschulen geboten werden, hat die Universität in Los Angeles ergänzende Vorlesungen veranstaltet. Dazu wurden Professoren verpflichtet, die nicht nur bedeutende theoretische Wissenschaftler sind, sondern auch aus angewandter Mathematik viel bieten können. Es waren dies: *J. Barnes, E. Beckenbach, R. Bellmann, F. Bohnenblust, J. Brown, R. Courant, J. Forsythe, J. Green, M. Hestenes, J. King, S. Lefschetz, D. Lehmer, Ch. Morrey, L. Pipes, M. Schiffer, I. Sokolnikoff, Ch. Tompkins* und *N. Wiener*. Die Vorlesungen wurden auch an anderen Universitäten Amerikas gehalten und nun in Buchform herausgegeben. Das Buch besteht aus drei Teilen:

I. Mathematical Models. Es handelt sich hier um die mathematische Behandlung von physikalischen Problemen, wie dies durch Differential- und Integralgleichungen und Variationsrechnung geschieht.

II. Probabilistic Problems. Dazu gehören Ergodentheorie, Spieltheorie, Monte-Carlo-Methoden, u. a.

III. Computational Considerations. Dieser Abschnitt bringt numerische Methoden zur Lösung von speziellen Problemen, aber auch Matrizenrechnung für Ingenieure, Funktionaltransformationen und konforme Abbildung. Hervorgehoben sei die ausführliche Behandlung der nicht-linearen Methoden.

Die Darstellung ist naturgemäß selten einführend, meist knapp und daher für viele Ingenieure schwer verständlich. Die einzelnen Vorlesungen können nur einen guten Überblick geben. Daran muß ein gründliches Studium angeschlossen werden. Einschlägige Lehrbücher finden sich am Ende jeder Vorlesung in großer Zahl. *N. Hofreiter*, Wien

Equazioni differenziali non lineari. Von *G. Sansone* und *R. Conti*. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie Matematiche: Band 3.) Mit 133 Textabb., XIX, 647 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1956. Lire 7500.

Die Theorie der nicht linearen Differentialgleichungen gewinnt in den Anwendungsgebieten der Physik und Technik immer größere Bedeutung, nicht nur deshalb, weil viele Probleme, etwa der Mechanik deformierbarer Medien oder der Elektrizitätslehre, von vornherein sich in solcher Gestalt präsentieren, sondern auch weil bei vielen Problemen der theoretischen Physik, vor allem der Atomphysik, die vor kurzem noch mit linearen Differentialgleichungen bewältigt wurden, sich die Notwendigkeit ergibt, diese Differentialgleichungen, um mit den neueren experimentellen Resultaten in Übereinstimmung zu bleiben, durch weitere Glieder zu ergänzen, die nicht linear sind. Daher ist die vorliegende Monographie über nicht lineare (gewöhnliche) Differentialgleichungen außerordentlich zu begrüßen und es kann als ihr besonderer Vorzug hervorgehoben werden, daß sie die mannigfaltigen und sehr zerstreut liegenden Einzeluntersuchungen dieses Gebietes, und zwar mit Berücksichtigung der noch in den letzten Jahren 1954 bis 1955 erschienenen Literatur, in übersichtlicher Form unter leitende Gesichtspunkte einordnet und zusammenfaßt. So kann dieses Buch jedem Mathematiker und Physiker, der in diese Probleme eindringen oder rasch die bis heute bekannten Resultate auffinden möchte, als eine fast unentbehrliche Hilfe empfohlen werden. Die Darstellung ist durchaus klar und ohne spezielle Vorkenntnisse leicht verständlich; es ist auch darauf verzichtet worden, einzelne Kapitel dadurch zu kürzen, daß etwa auf die entsprechenden Entwicklungen im zweibändigen Werk des ersten Verf. (*G. Sansone*, Equazioni differenziali nel campo reale. Bologna 1941; 2. Aufl. 1949) verwiesen worden wäre.

Der gegebene Stoff, nämlich die Lösungsmethoden und das Verhalten der Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder allgemein Differentialgleichungssystemen $dx_i/dt = f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ kann nicht lückenlos systematisch durchgearbeitet werden; das ist bis zu einer gewissen Vollendung nur bei Beschränkung auf autonome Systeme mit $n = 2$ Variablen und auf lineare Systeme möglich. Die speziellen Untersuchungen und Resultate scharen sich vor allem um die Frage, wie sich die Lösungen in der Umgebung eines isolierten singulären Punktes oder für $t \to \pm \infty$ verhalten, die Fragen der Existenz von periodischen Lösungen und der Stabilität der Lösungen.

Kurze Inhaltsangabe: I. Allgemeines — II. Besondere ebene autonome (d. h. nicht explizit von t abhängige) Systeme. — III. Die Singularitäten von *Briot-Bouquet*; Sätze von *Bendixson* und *Wintner*. — IV. Ebene autonome Systeme; periodische Lösungen. — V. Gestörte ebene autonome Systeme; Sätze von *H. Weyl* und *K. A. Keil*. — VI. Einige autonome Systeme mit einem Freiheitsgrad; die Gleichungen von *van der Pol* und *Liénard*. — VII. Einige nicht autonome Systeme mit einem Freiheitsgrad; Sätze von *Brouwer*, *Cartwright*, *Littlewood*, *Massera*, *Yoshizawa*, *F. John*, *Lefschetz*, *Levinson*, *Antosiewicz*, *Caccioppoli*, *Ghizzetti*, *Ascari* u. a. — VIII. Lineare Systeme. — IX. Stabilität: Sätze von *Liapunov*.

W. Gröbner, Innsbruck

Handbuch der Laplace-Transformation. Von *G. Doetsch*. Band III: Anwendungen der Laplace-Transformation. 2. Abtlg. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe: Band 19.) Mit 23 Textabb., 300 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1956. Geb. sfr. 40.—.

Der vorliegende letzte Band des großzügig angelegten Werkes bringt in Fortsetzung des zweiten Bandes weitere Anwendungen der Laplace-Transformation. Inhalt: Allgemeines über partielle Differentialgleichungen und ihre Integration vermittels Laplace-Transformation. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Partielle Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. Eindeutigkeitssätze und Kompatibilitätsbedingung für die Rand- und Anfangswerte. *Huygens*sches und *Euler*sches Prinzip. Gewöhnliche Differenzengleichungen im Originalraum. Gewöhnliche Differenzengleichungen im Bildraum. Partielle Differenzengleichungen. Integralgleichungen vom reellen Faltungstyp im endlichen Intervall. Integralgleichungen vom reellen Faltungstyp im unendlichen Intervall. Funktionalrelationen mit reellen Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheoreme. Integralgleichungen vom komplexen Faltungstypus. Korrespondenz zwischen komplexen Faltungsintegralen von Bildfunktionen und Produkten ihrer Originalfunktionen. Verschiedene mit Laplace-Transformation lösbare Typen von Integralgleichungen. Die endliche Laplace-Transformation. Ganze Funktionen vom Exponentialtypus. — Anhangweise findet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis, historische Hinweise, sowie Nachträge und Berichtigungen zu den vorangehenden Bänden.

Die ungeheure Arbeit, welche mit der Abfassung eines solchen Werkes verbunden ist, ist bei der Verstreutheit der Literatur besonders auf diesem Gebiet nicht hoch genug einzuschätzen. So wird das Buch für alle, die mit Laplace-Transformation zu tun haben, angefangen vom „Mathematiker reinsten Wassers", bis zum „angewandtesten aller Angewandten" ein unentbehrlicher Ratgeber sein.

K. Prachar, Wien

Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Von *C. Carathéodory* †. Zweite Auflage, herausgegeben von *E. Hölder*. Band I: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XIV, 170 S. Leipzig: G. B. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. Geb. DM 14.—.

C. Jacobi hat 1836 bemerkt, daß die Differentialgleichungen, die in der Variationsrechnung vorkommen, und die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung miteinander verknüpft sind und daß insbesondere jeder solchen partiellen Differentialgleichung Variationsprobleme zugeordnet werden können. Die grundlegende Bedeutung dieses Zusammenhanges wurde in der Folgezeit entweder nicht erkannt oder zumindest nicht weiter verfolgt, bis er 1935 von *C. Carathéodory* in den Mittelpunkt seines bekannten Buches über Variationsrechnung gestellt wurde. Demgemäß besteht dieses (inzwischen vergriffene) Buch aus zwei Teilen, einem ersten über partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung und einem zweiten über die Variationsrechnung selber. Diese beiden Teile werden derzeit als Einzelbände im photomechanischen Druckverfahren neu verlegt, und zwar zunächst der erste, der mit einzelnen Berichtigungen und Bemerkungen seitens des Herausgebers eben erschienen ist. Sein Inhalt bildet einen scharf umgrenzten selbständigen Teil der Analysis, der auch als solcher das Interesse der Mathematiker beanspruchen kann. *K. Mayrhofer*, Wien

Wahrscheinlichkeitstheorie. Von *H. Richter*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 86.) Mit 14 Textabb., XII, 435 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 66.—, geb. DM 69.60.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat ihren Ursprung in einer mathematischen Theorie der Zufallsspiele. Die auf *Laplace* zurückgehende Definition des Begriffes der Wahrscheinlichkeit eignet sich zwar recht gut für Glücksspiele, hat aber doch schwere Nachteile. Als die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf viele Gebiete angewandt wurde, wie Statistik, Finanzmathematik, Fehlerrechnung, mußten die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung revidiert werden. Erst durch die Verwendung maßtheoretischer Begriffsbildungen hat die Wahrscheinlichkeitstheorie eine befriedigende Formulierung erhalten. Kap. I und IV bringen eine kurze, in sich geschlossene Darstellung derjenigen Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie, die bei einem modernen Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie gebraucht werden. Schon im ersten Kapitel findet sich der Begriff der Verteilungsfunktionen mit einigen grundlegenden Eigenschaften. Kap. II und III enthalten eine sehr instruktive Behandlung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit. Es wird vom intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff ausgegangen, dann der naturwissenschaftliche Wahrscheinlichkeitsbegriff besprochen und dem Leser das Verständnis vermittelt, warum bestimmte Axiome in der abstrakten Wahrscheinlichkeitstheorie gewählt werden, warum die Wahrscheinlichkeit als normiertes Maß aufzufassen ist und die Wahrscheinlichkeitstheorie ein Teilgebiet der abstrakten Maßtheorie ist. Die weiteren Kapitel V bis VII handeln von zufälligen Größen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsfeldern (Wahrscheinlichkeitsdichten, Momente, charakteristische Funktionen), von speziellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Binomialverteilungen, Poissonverteilungen, Normalverteilungen und den für die mathematische Statistik wichtigen Verteilungen) und von der Konvergenz zufälliger Größen (Grenzwertsätze, Gesetz der großen Zahlen). Das Buch enthält alles, was in einführenden Büchern über Wahrscheinlichkeitsrechnung steht, unterscheidet sich aber durch die maßtheoretische Orientierung. Gerade auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung war ein exakt geschriebenes Lehrbuch in deutscher Sprache ein dringendes Bedürfnis,

dem nur durch dieses Buch abgeholfen wird. Damit ist wieder eine Lücke in der deutschen Lehrbuchliteratur in befriedigender Weise geschlossen worden.

N. Hofreiter, Wien

Statistische Methoden für die Wissenschaft. Von *Sir R. A. Fisher*. Zwölfte Auflage. Übertragung ins Deutsche von *Dora Lucka*. XV, 359 S. Edinburgh und London: Oliver and Boyd. 1956. 30 s.

Die erste Auflage erschien 1925; jede folgende brachte Erweiterungen; die zwölfte Auflage kam 1954 heraus. Nachdem das Buch bereits ins Französische, Italienische, Spanische und Japanische übersetzt worden war, wurde nun das Buch auch ins Deutsche übersetzt. Die Arbeiten von *Sir R. A. Fischer* haben bahnbrechend auf vielen Gebieten der Statistik gewirkt und es ist daher begreiflich, daß sein Lehrbuch „Statistical Methods for Research Workers" viel studiert wurde. Es verfolgt den Zweck, dem Leser die Mittel in die Hand zu geben, um statistische Untersuchungen durchzuführen. Es ist vor allem für Biologen und Mediziner bestimmt und daher können die Vorkenntnisse des Lesers aus Mathematik sehr gering sein. Die statistischen Methoden werden erklärt, aber meist nicht bewiesen. Denn dazu würden doch gründliche Kenntnisse aus Mathematik erforderlich sein. Ein großer Teil des Buches wird von Zahlenbeispielen eingenommen. Die Beispiele sind der Praxis entnommen und demonstrieren vortrefflich die allgemeinen Verfahren. Diese gliedern sich in üblicher Weise in solche, die das gegebene statistische Material beschreiben und in Prüfverfahren. Von letzteren wird eine sehr große Auswahl angegeben (z. B. Maximum Likelihood-Verfahren, Ermittlung von Konfidenzintervallen, χ^2-Test, Prüfung von Regressions- und Korrelationskoeffizienten, Varianzanalyse, Prüfung auf Wirkungsgesetzmäßigkeit von Statistiken, Versuchsplanungen). Eine Übersetzung ist dann besonders gut, wenn man nicht merkt, daß es eine Übersetzung ist. Das kann man leider hier nicht sagen. Die Übersetzung hätte etwas freier erfolgen sollen. Auch hätten die im deutschen Sprachraum üblichen Ausdrücke beibehalten werden sollen; z. B. Zeilen und Spalten einer Matrix statt Reihen und Kolumnen: Poisson-Verteilung statt Poisson-Reihe; Signifikanz statt Bedeutsamkeit; Streuung und mittlere quadratische Abweichung statt Varianz und Standardabweichung, wenn auch diese Ausdrücke hier manchmal gebraucht werden.

N. Hofreiter, Wien

Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Vol. IV. (Contribution to Biology and Problems of Health.) Herausgegeben von *J. Neyman*. VIII, 179 S. Berkeley and Los Angeles: University of California Press. 1956. $ 5,75.

Die beiden früheren Symposia, die ebenfalls vom Statistischen Laboratorium der University of California unter Leitung von *J. Neyman* veranstaltet wurden, ließen bereits erkennen, daß hier vielfach Richtunggebendes für die weitere Theorie und Anwendung der Statistik dargelegt wird. In ganz besonderem Maße gilt dies für das dritte Symposium. Das dokumentiert sich schon rein äußerlich darin, daß statt eines Bandes, wie bisher, diesmal fünf Bände erschienen sind. Der vorliegende vierte Band ist speziell statistischen Theorien in Biologie, Genetik und Medizin gewidmet. Wir kennzeichnen kurz die einzelnen Vorträge, soweit dies im Rahmen einer Besprechung möglich ist. *J. Crow* und *M. Kimura* beschäftigten sich mit mathematischen Theorien für die genetische Entwicklung biologischer Gesamtheiten. Der erste Autor gibt einen guten Überblick über die

deterministischen Theorien, vor allen Dingen im Anschluß an *Haldane*, *Fisher* und *Wright*. *Kimura* studiert die Änderungen der Gen-Häufigkeiten als stetigen stochastischen Prozeß. (Vgl. die früheren Untersuchungen von *Feller*, die zeigen, daß speziell die Theorie von *Wright* äquivalent einer Diffusionsgleichung für die Gen-Häufigkeit ist.) *E. R. Dempster* betrachtet genetische Probleme für Gesamtheiten, die unter Kontrolle stehen (Züchtung, Laboratoriumsversuche) und setzt sich vor allen Dingen mit den Untersuchungen von *V. L. Anderson* und *O. Kempthorne* auseinander. (Vgl. auch *G. Malécot*, Les Mathématiques de l'Hérédité.) Die nächste umfangreiche Arbeit dreier Autoren liegt im Umkreis von Ideen, die auf *Volterra* und *d'Ancona* („Kampf ums Dasein") zurückgehen. Die Arbeit zerfällt in zwei Teile: Zunächst wird die biologische Situation beschrieben. (*T. Park.*) Der zweite Teil (*J. Neyman, E. L. Scott*) beschäftigt sich mit der Aufstellung mathematischer Modelle. Diese werden — sehr treffend — als Modelle „im Großen" und „im Kleinen" klassifiziert. Jene bemühen sich unter Weglassung weniger wichtiger Faktoren das Gesamtgeschehen zu erfassen, diese behandeln Einzelheiten. Zunächst werden Modelle im Großen vorgeführt, deren eines (*L. Le Cam*) mathematisch auf einen kontinuierlichen Markoff-Prozeß hinauskommt. Sie zeigen deutlich die großen Schwierigkeiten, welche sich einer adäquaten Beschreibung der biologischen Tatsachen entgegenstellen. Spezielle Aufmerksamkeit wird dann der mathematischen Behandlung von Einzelheiten (hier: Fruchtbarkeit und Kannibalismus von Mehlkäferarten) gewidmet. (*C. L. Chiang, B. Sherman.*) Inhaltlich eng miteinander verwandt sind die Beiträge von *M. S. Bartlett, A. T. Bharucha-Reid, D. G. Kendall* und *W. F. Taylor*, welche sich auf die Theorie der Epidemien und der Ansteckung beziehen. Im Beitrag des ersten Autors heben wir insbesondere die Anwendung der von ihm entwickelten Theorie der stochastischen Punktprozesse hervor. Der zweitgenannte Autor subsummiert eine Reihe von Ansätzen unter den Verzweigungsprozessen. (Für diese vgl. *Bellmann, Harris, Feller, Zolotarev.* u. a.) Schließlich sind noch die medizinischen Problemen gewidmeten Arbeiten von *C. L. Chiang, J. L. Hodges, Jr.* und *J. Yerushalmy* einerseits und von *J. Cornfield* anderseits zu erwähnen. Die erste Arbeit behandelt das komplexe Problem einer statistischen Theorie der medizinischen Diagnose. Eine der ersten Untersuchungen in dieser Richtung stammt bekanntlich von *J. Neyman*. Die mathematische Behandlung dieses praktisch sehr wichtigen Problems kommt auf Fragen des „Optimalen Stoppens" in der statistischen Qualitätskontrolle hinaus. *L. Schmetterer*, Hamburg

Vorlesungen über Vektorrechnungen. Von *M. Lagally* †. Fünfte Auflage, neu bearbeitet von W. Franz. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe A: Band 2.) Mit 93 Textabb., XX, 462 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1956. Geb. DM 22.—.

Das beliebte und schon klassische Standardwerk über Vektorrechnung wird hier in neuer Auflage herausgebracht. Da die Neubearbeitung von einem theoretischen Physiker besorgt wurde, kann man sicher sein, daß das Buch für die Studierenden der Physik und der Naturwissenschaften noch besser geeignet sein wird als bisher. Neu hinzugekommen sind vor allem die invariante Definition der vektoriellen Differentiation, verschiedene Dinge über hyperkomplexe Zahlen, über vektorielle und quaternionale Kugelfunktionen, gewöhnliche Differentialgleichungen in Vektorschreibweise, sowie verschiedene naturwissenschaftliche Anwendungen. Auch das Kapitel über Riemannsche Geometrie wurde in vieler Hinsicht verbessert. So ist also dieses Buch mehr denn je ein unentbehrliches Hilfsmittel für jeden, der ein solides Studium der Vektorrechnung unternehmen will. *K. Prachar*, Wien

Grundlagen der Geometrie. Von *D. Hilbert* †. Achte Auflage. Mit Revisionen und Ergänzungen von *P. Bernays*. Mit 124 Textabb., VII, 251 S. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1956. DM 11.40, geb. DM 13.40.

Der vorliegende Neudruck des Buches unterscheidet sich von der 1930 erschienenen siebenten Auflage nur durch einige Verbesserungen und kleinere Ergänzungen; vor allem ist eine neue, vereinfachte Fassung der Proportionenlehre als Supplement dazugekommen. Im übrigen ist schon die große Zahl der Auflagen ein eindrucksvoller Beweis für die Bedeutung dieses klassischen Werkes des verewigten Meisters. *W. Nöbauer*, Wien

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen. Von *A. W. Pogorelow*. (Schriftenreihe des Forschungsinstitutes für Mathematik: Heft 3.) 78 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1956. DM 5.50.

In dieser Monographie — deren russisches Original 1952 im Verlag der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR zu Kiew erschienen ist — erbringt der Verfasser den Beweis dafür, daß je zwei geschlossene, konvexe, zueinander isometrische Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum kongruent sind. Damit ist ein Problem, an dem im Laufe der Zeit verschiedene Autoren gearbeitet haben, in voller Allgemeinheit gelöst; es ist also jetzt nicht mehr notwendig, die betrachteten Flächen irgendwelchen Regularitätsvoraussetzungen zu unterwerfen.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf die Methoden der in den letzten Jahren von *A. D. Alexandrow* geschaffenen Theorie der allgemeinen konvexen Flächen, besteht daher zum Großteil aus Überlegungen rein geometrischer Natur und gibt ein lehrreiches Beispiel für die Fruchtbarkeit dieser neuen Flächentheorie.

W. Nöbauer, Wien

Mathematische Formelsammlung. Von *F. Ringleb*. Sechste, erweiterte Auflage. (Sammlung Göschen: Band 51/51a.) Mit 37 Textabb., 258 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1956. DM 4.80.

Die ursprünglich von *O. Bürklen* verfaßte, später von *F. Ringleb* vollständig umgearbeitete mathematische Formelsammlung erscheint nun in sechster Auflage. Sie enthält wie bisher Formeln zur Algebra, Zahlentheorie, Trigonometrie, Analytische Geometrie, Astronomie, Differential- und Integralrechnung, Differentialgeometrie und Differentialgleichungen. Sie unterscheidet sich von den letzten Auflagen nur um kleine Ergänzungen. Frühere Auflagen wurden in dieser Zeitschrift: Mh. Math. **35**, 63 (1928), **38**, 46 (1931), **45**, 4 (1937) besprochen.

N. Hofreiter, Wien

Mechanika. Von *St. Banach*. Vierte Auflage. (Biblioteko Matematyczno: Band 13.) 558 S. Warschau. 1956.

Dies ist eine in einigen Punkten ergänzte, jedoch sonst unveränderte Neuauflage der dritten Auflage des schönen Banachschen Buches. Eine englische Übersetzung nach der dritten Auflage erschien 1951 in der Sammlung Monografie Matematyczne (Bd. 24) (vgl. die Besprechung Monatshefte **56**, 85 (1952).

K. Prachar, Wien

Methode und Praxis des Unterrichts in der Himmelskunde. Von *H. Seitz.* Mit 47 Textabb., 140 S. Heidelberg: Quelle & Meyer. 1957. DM 11.50.

Astronomie ist an keiner allgemeinbildenden Schultype des deutschen Sprachgebiets selbständiges Unterrichtsfach, und die Bestrebungen, das bisher in den Lehrplänen des Geographie-, Physik- und Mathematikunterrichts noch vorgesehene himmelskundliche Wissensgut im Zuge einer allgemeinen Siebung des Lehrstoffes weiter zurückzudrängen, sind stark. Gerade in dieser Situation ist das vorliegende Buch besonders begrüßenswert. Denn der Verfasser, offenkundig ein erfahrener Schulmann, zeigt darin Lehrern und Unterrichtsverwaltungen nicht nur vieles vom Bildungswert der Astronomie und deren Querverbindungen zu andern Lehrgegenständen (auch zur Kulturgeschichte!), sondern er bietet in weitem Umfang unmittelbar verwendbare Anleitungen für die Erarbeitung des einschlägigen Stoffes unter möglichster eigener Mitwirkung der Schüler. Etwas zu knapp erscheint der Abschnitt über Astrophysik (S. 96 bis 100) im Hinblick auf deren hervorragende Bedeutung für unser gesamtes Weltbild. Ernstlich zu bemängeln sind die Literaturhinweise zum III. Teil (Astronomie auf der Oberstufe höherer Schulen). Abgesehen davon, daß drei erstrangig hierher gehörige Werke (*Stumpff*, Die Erde als Planet, 2. Aufl. 1955; *Newcomb-Engelmann*, Populäre Astronomie, 8. Aufl. 1948; *Becker*, Sterne und Sternsysteme, 2. Aufl.1950) fehlen, andere (z. B. *Thomas*, Astronomie mit veralteten Auflagen genannt sind, kann auch einem akademisch gebildeten Mathematik-Physik-Lehrer nicht zugemutet werden, aus 39 Titeln, die nur in zwei Gruppen unterteilt, sonst aber alphabetisch nach Verfassernamen geordnet sind, das Buch herauszufinden, welches ihm eine rasche und systematische Orientierung gewährt. Zum mindesten hätten astronomische Plauderbücher als solche gekennzeichnet oder weggelassen werden müssen. *K. Ferrari d'Occhieppo*, Wien

Les fondements de la chimie théoriques (mécanique ondulatoire appliquée a l'étude des atomes et des molécules). Von *R. Daudel.* X, 236 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956. ffr. 3500.

Einer der wichtigsten Anwendungsbereiche der Wellenmechanik stellt die rein rechnerische Behandlung der chemischen Eigenschaften der Atome und Moleküle dar, ein Gebiet, auf dem sich Physiker und Chemiker zu fruchtbarer Zusammenarbeit finden können. Paris besitzt in der Person von *R. Daudel* einen hervorragenden Vertreter dieser „Quantenchemie" und es ist daher sehr zu begrüßen, daß *Daudel* genügend Zeit erübrigen konnte, um die Grundlagen der Quantenchemie übersichtlich zusammenzustellen. Das Buch beginnt im ersten Teil mit einer klaren Behandlung der Rechenmethoden zur Ermittlung der Energieniveaus des Wasserstoffatoms und der wasserstoffähnlichen Atome und einer Erörterung der dabei auftretenden Eigenfunktionen. Daran schließt sich die Behandlung des Helium-Atoms und höherer Atome, sowie die Theorie des Schalenbaues der Atome und des periodischen Systems. Der zweite Teil des Buches ist den Molekülproblemen gewidmet und befaßt sich in ausführlichster Weise mit den verschiedenen Näherungsmethoden, die zur rechnerischen Behandlung der dabei auftretenden Probleme der Elektronenkonfigurationen entwickelt worden sind. Daß dabei der Autor seiner Forschungsrichtung entsprechend die von ihm gesammelten Erfahrungen in der Anwendung der verschiedenen Näherungsmethoden in ausgiebiger Weise verwertet, kommt der Darstellung außerordentlich zugute. In einem letzten entscheidenden Kapitel des Buches werden die neuartigen Ansichten des Verf. über Austauschenergie, Lokalisierung und Ununterscheidbarkeit von Elektronen dargelegt und insbesondere der neue

Begriff „Loge" eingeführt (die genaue Definition dieses neuen Begriffes findet sich auf den Seiten 89 und 90 und kann hier nicht ausführlich wiedergegeben werden), mit Hilfe dessen der Verf. eine neue Übersichtlichkeit in der Theorie der chemischen Bindung erzielen zu können glaubt, was insbesondere für die Chemiker von größtem Interesse sein dürfte. *Th. Sexl*, Wien

Les méthodes d'approximation variationelles dans la théorie des collisions atomiques et dans la physique des piles nucléaires. Von *T. Kahan, G. Rideau* und *P. Roussopoulos*. (Mémorial des Sciences Mathématiques: Fascicule CXXXIV.) IV, 82 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956.

Da die in der Theorie der Beugung von de Brogliewellen an Atomen und Kernen auftretenden Probleme nur selten exakt gelöst werden können, wurden in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren Näherungsmethoden entwickelt, die sich vorwiegend auf Variationsbetrachtungen stützen. Der Zweck der vorliegenden zusammenfassenden Untersuchung ist es, diese Methoden in übersichtlicher Weise zusammenzustellen. Zunächst wird in einleitenden Abschnitten das Streuproblem der Atom- und Kernphysik auf Grund der Bornschen Näherungsmethode und auf Grund der exakten Methode der Partialwellen dargelegt. Dabei wird in üblicher falscher Weise die Entwicklung einer in der z-Richtung einfallenden ebenen Welle e^{ikz} nach den nicht normierten Legendreschen Kugelfunktionen, nämlich

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\, P_l(\cos\vartheta),$$

Lord Rayleigh zugeschrieben, obwohl dieselbe bereits vor *Rayleigh* von *Bauer*, Journ. f. Math. LVI, 1859 (S. 104–106) angegeben wurde. Die Fruchtbarmachung dieser Entwicklung und der Methode der Partialwellen für in der Akustik auftretenden Probleme stammt allerdings von *Lord Rayleigh*. Probleme der Beugung von de Brogliewellen an Atomen wurden nach dieser Methode von *Faxen* und *Holtsmark*, Probleme der Beugung von de Brogliewellen an Atomkernen einerseits von *Gordon*, andererseits von *E. Guth* und *Th. Sexl* behandelt. Würde man das zwischen einfallendem Teilchen und Atomkern wirksame Potential kennen, so würden rein rechnerisch die Phasenänderungen und damit die Wirkungsquerschnitte folgen. Da aber das Potential in Wirklichkeit nicht bekannt ist, muß man umgekehrt aus den experimentell ermittelten Wirkungsquerschnitten die Phasenänderungen zurückrechnen und dann auf Grund von Variationsmethoden mit Hilfe von Versuchsfunktionen das wirksame Potential berechnen. Nach dieser Methode haben sich insbesondere die von *Schwinger* und Mitarbeitern in Amerika entwickelten Rechenmethoden als fruchtbar und nützlich erwiesen. Es ist daher verständlich, daß ein großer Teil der vorliegenden Untersuchung der Darstellung dieser Methoden gewidmet ist. Ein letztes Kapitel versucht Variationsmethoden in der Theorie der Kernreaktoren nutzbar zu machen, wobei die Ausgangsgleichung auf ähnlichen physikalischen Grundlagen beruht wie die Boltzmannsche Integro-Differentialgleichung in der kinetischen Gastheorie.

Th. Sexl, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27–29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

herausgegeben von

Fritz Regler und **Hans Thirring**

Wien Wien

Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz

Zuletzt erschien:

11. Band. 1. Heft

(Ausgegeben im Mai 1957)

Mit 34 Abbildungen. 128 Seiten. 1957

S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60

Inhaltsverzeichnis: **Thirring, H.** LUDWIG BOLTZMANN. — **Grümm, H.** und **H. Spurny.** Beispiele streng berechenbarer Ionen- und Elektronenbahnen im ebenen elektrostatischen Feld. — **Blaha, F., S. Marinelli** und **E. Schmid.** Bearbeitungserholung von aus der Schmelze gezogenen Cadmium-, Zink- und Aluminium-Kristallen. — **Adler H.** und **F. Stegmüller.** Zur Lumineszenz von Natriumchlorid. — **Baumann, K.** Bremsstrahlung von neutralen Vektorteilchen mit anomalem magnetischem Moment. — **Hittmair, O.** Reduzierte Stripping-Breite und Schalenmodell. — **Lang, K.** Die Druckverbreiterung im Argonspektrum. — **Breitenhuber, L.** Permeabilitätsmessungen im Gebiete der Zentimeterwellen. — **Menhardt, W.** *K*-Einfang mit zwei Bremsquanten. — Buchbesprechungen.

Die Maßsysteme in Physik und Technik

Kritische Untersuchung der Grundlagen zur Aufstellung einwandfreier Maßsysteme und Vergleich der bestehenden Systeme in Physik und Technik

Von

Dipl.-Ing. Dr. techn. **Günther Oberdorfer**

o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Graz

VI, 140 Seiten. Gr.-8°. 1956

Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, sfr. 16.30, $ 3.80

„... Der Verfasser behandelt die Grundlagen der Gesetzbildung, die Maßsystembildungen, das Maßsystem abgeschlossener Gebiete der Physik und bringt eine kurze Betrachtung über eine Erweiterung des Dimensionsbegriffes. Jeder, der über Maßsysteme und Maßeinheiten in Physik und Technik mitreden möchte, sei mit Nachdruck auf das Buch von *G. Oberdorfer* hingewiesen, das zur Zeit wohl das beste und prägnanteste Buch auf diesem Gebiet sein dürfte."

Allgemeine Wärmetechnik

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Analytische und konstruktive Differentialgeometrie

Von

Dr. Erwin Kruppa

o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 75 Textabbildungen. VII, 191 Seiten. Gr.-8°. 1957

Ganzleinen S 234.—, DM 39.—, sfr. 39.90, $ 9.30

Das Buch ist die Frucht einer dreißigjährigen Lehrtätigkeit Professor *Kruppas*, des bekannten Vertreters der Wiener Schule der darstellenden Geometrie. Der Verfasser gibt nach einer gründlichen Einführung in die analytische Differentialgeometrie der anschaulichen Denkweise unter dem Titel „Konstruktive Differentialgeometrie" weiten Raum. Er will damit für den Gedanken werben, daß sich auch in der dreidimensionalen Differentialgeometrie die anschaulich-konstruktive Denkweise erfolgreich in mathematischer Strenge anwenden läßt, sofern man vorher für eine solide analytische Grundlegung gesorgt hat.

Der erste Teil des Buches ist eine Einführung in die analytische Theorie der Kurven und Flächen, der Strahlflächen, Strahlkongruenzen und Strahlkomplexe im dreidimensionalen euklidischen Raum. Im zweiten Teil wird dieser Stoff in konstruktiver Denkweise weiterentwickelt. Er bringt Ergänzungen, die in die dritte Differentiationsordnung führen, behandelt die konformen und projektiven Bilder der nichteuklidischen Geometrien als Bilder der auf den Flächen konstanten Gaußschen Krümmungsmaßes herrschenden inneren Geometrien, liefert die Grundlagen zur graphischen Behandlung der Kurven und Flächen im Sinne der darstellenden Geometrie und schlägt mit einem Kapitel über kinematische Differentialgeometrie eine Brücke zur Mechanik.

Diese Gegenüberstellung der analytischen und der konstruktiven Methode in zwei Teilen fast gleichen Umfanges macht das Buch zu einer neuartigen Erscheinung auf dem Gebiet der Differentialgeometrie. An Vorkenntnissen werden Vertrautheit mit den Elementen der Differentialrechnung und einige grundlegende Begriffe der projektiven Geometrie vorausgesetzt.

Inhaltsübersicht: **Grundbegriffe der Vektorrechnung. — Analytische Differentialgeometrie.** Raumkurven. Längen, Winkel und Flächeninhalte auf krummen Flächen; flächentreue und konforme Abbildungen. Krümmung der Flächen. Biegung von Flächen. Windschiefe Strahlflächen und Ergänzungen zur Kurventheorie. Strahlkongruenzen. Strahlkomplexe. — **Konstruktive Differentialgeometrie.** Konstruktive Ergänzungen zur Theorie der Kurven und Torsen, zur Flächentheorie und zur Theorie der windschiefen Strahlflächen. Konstruktive Differentialgeometrie besonderer Flächen und Kurven. Das konforme und das projektive Bild der nichteuklidischen Geometrien auf den Flächen konstanter Gaußscher Krümmung. Kinematische Differentialgeometrie. — Namen- und Sachverzeichnis.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung